第 6 章 線形偏微分方程式

6.0. 第 6 章の目次

6.1. 線型 2 階偏微分方程式の分類

この節は [スミルノフ,「高等数学教程第 9 巻 」, 共立出版, p.371–378] に従う．$\mathbf{R}^2$ の 2 階方程式

$$a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+\cdots=0 \tag{1}$$

に変数変換

$$\xi=\varphi(x,y), \eta=\psi(x,y) \tag{2}$$

を行う．このとき合成関数の微分法により

$$u_x=u_\xi\varphi_x+u_\eta\psi_x, u_y=u_\xi\varphi_y+u_\eta\psi_y$$

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}\varphi_x^2+2u_{\xi\eta}\varphi_x\psi_x+u_{\eta\eta}\psi_x^2+u_\xi\varphi_{xx}+u_\eta\psi_{xx}$$

$$u_{yy}=u_{\xi\xi}\varphi_y^2+2u_{\xi\eta}\varphi_y\psi_y+u_{\eta\eta}\psi_y^2+u_\xi\varphi_{yy}+u_\eta\psi_{yy}$$

$$u_{xy}=u_{\xi\xi}\varphi_x\varphi_y+u_{\xi\eta}(\varphi_x\psi_y+\varphi_y\psi_x)+u_{\eta\eta}\psi_x\psi_y+u_\xi\varphi_{xy}+u_\eta\psi_{xy}$$

これを (1) に代入して整理すれば

$$a'(\xi,\eta)u_{\xi\xi}+2b'(\xi,\eta)u_{\xi\eta}+c'(\xi,\eta)u_{\eta\eta}+\cdots=0 \tag{3}$$

ここに

$$\begin{aligned} a'(\xi,\eta) &= a\varphi_x^2+2b\varphi_x\varphi_y+c\varphi_y^2 \\ c'(\xi,\eta) &= a\psi_x^2+2b\psi_x\psi_y+c\psi_y^2 \\ b'(\xi,\eta) &= a\varphi_x\psi_y+b(\varphi_x\psi_y+\psi_x\varphi_y)+c\varphi_x\psi_y \end{aligned} \tag{4}$$

$$a'c'-b'^2=(ac-b^2)(\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x)^2 \tag{5}$$

がなりたつ．それゆえ $ac-b^2$ は正則な座標変換 (2) により不変量になる．すなわち, $ac-b^2>0$ なら $a'c'-b'^2>0$ となり, $ac-b^2<0$ なら $a'c'-b'^2<0$ となり, $ac-b^2=0$ なら $a'c'-b'^2=0$ となる．

Case(I) $ac-b^2<0$ の場合

$$u_{xx}-u_{yy}+\cdots=0$$
$$\xi=\frac{x+y}{2},\ \eta=\frac{x-y}{2}$$

とおくと

$$u_{\xi\eta}+\cdots=0$$

この場合方程式を双曲型という．

Case(II) $ac-b^2>0$ の場合

$b'=0$ とする．$a'=c'=\sqrt{(ac-b^2)(\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x)^2}$ ととると方程式は

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\cdots=0$$

となり, この場合方程式は楕円型であるという．

Case(III) $ac-b^2=0$ の場合

$a'=0$ ととると $ac-b^2=0$ より $a'c'-b'^2=0$ で $b'=0$ となる．関数 c' は恒等的にはゼロではない．なぜならそうでなければ変換された方程式 (3) は 1 階方程式となってしまう．(ξ,η) から (x,y) への逆変換は 2 階の方程式 (1) を与えない．よって方程式 (3) は

$$u_{\eta\eta}+\cdots=0$$

となる．　これは放物型と呼ばれる．

定理 1.　正則な座標変換で退化しない 2 変数の線型 2 階方程式は双曲型, 楕円型, 放物型に分類される．

方程式の代表的な形は次のようである：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad \text{波動方程式}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \text{Laplace 方程式}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad \text{熱方程式}$$

波動方程式は弦の振動の方程式, 音の伝播の方程式などである．Laplace 方程式はドーム球場の形, 日本武道館の屋根の形などが解を表す．熱方程式は温度の分布の関数を表す方程式である．

6.2. 熱方程式の Dirichlet 問題

この節は [ペトロフスキー,「偏微分方程式論」, 東京図書,p.400–403] に従う. D を $t = t_0, t = T$ と 2 つの曲線 $x = \varphi_1(t), t = \varphi_2(t)$, $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ は連続で $t_0 \leq t \leq T$ で $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$ とする. $\Gamma = \{(x,t) \mid (x,t_0), \varphi_1(t_0) \leq x \leq \varphi_2(t_0), (\varphi_1(t),t), (\varphi_2(t),t), t_0 \leq t < T\}$ とおく. 領域 D の境界で $t = T$ の部分を除いたものである. これを parabolic boundary とよぶ.

u は $\overline{D}$ で連続で

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } D \\[2ex]
u(x,t_0) = f(x) & x \in [\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)] \\[2ex]
u(\varphi_1(t),t) = g_1(t) & u(\varphi_2(t),t) = g_1(t) \quad t \in [t_0, T)
\end{cases}
\tag{6}
$$

を満たす u を求める. この問題を熱方程式の初期値境界値問題または熱方程式の Dirichlet 問題という.

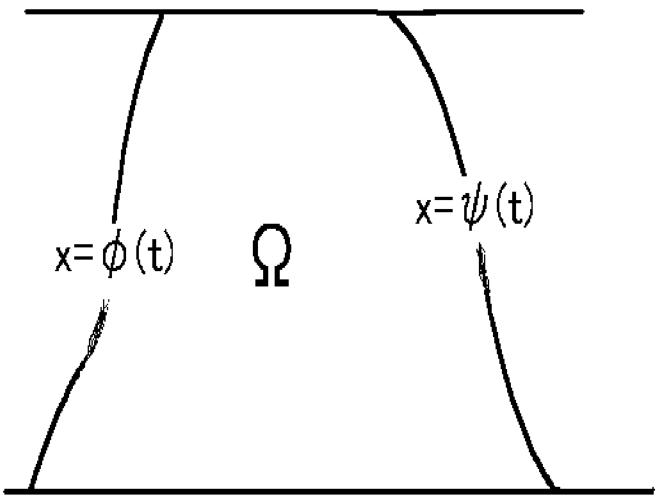

図 1: 領域 D

$D(0 < x < a, 0 < t < T)$ の問題では $t > 0$ にたいしてのみ解が求められて $t < 0$ にたいしては 解が求められない. それは $t \to -t$ とすると方程式は形が変わる：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

すなわち (6) は非可逆現象を記述する方程式である. 熱現象は非可逆である. 時間がたつと熱が集まってくることはない.

定理 2.**(最大値の原理)** D で連続な (6) の解 $u(x,t)$ はその最大値と最小値を Γ でとる.

(証明) 最小値は u を $-u$ と変えることにより最大値の場合に帰着される.

証明は Laplace 方程式の場合と同様に Privalov による. $\overline{D}$ における $u(x,t)$ の最大値を M, Γ 上の最大値を m とし $M>m$ とする. さらに一般性を失わずに $M>m>0$ としてよい. (u が熱方程式の解なら $u+\mathrm{const}$ もまた熱方程式の解) $\overline{D}-\Gamma$ に M の値をとる点が存在する. この 1 つの点を $(x^*,t^*)(t_0<t^*\leq T,\varphi_1(t^*)<x^*<\varphi_2(t^*))$ とする.

次に関数

$$v(x,t)=u(x,t)+\frac{M-m}{4\ell^2}(x-x^*)^2$$

を考える. ここで $\ell=\max\limits_{t_0\leq t\leq T}(\varphi_2(t)-\varphi_1(t))$. $v(x,t)$ については Γ 上で

$$v(x,t)\leq m+\frac{M-m}{4}=\frac{M}{4}+\frac{3}{4}m=\Theta M$$

(ここに $0<\Theta<1$) が成り立ち, 一方, 点 (x^*,t^*) では

$$v(x,t)=M$$

であるから, $v(x,t)$ も $u(x,t)$ と同様に $\overline{D}-\Gamma$ で最大値をとる.

この点を $(x_1,t_1)(T\geq t_1>t_0,\varphi_1(t_1)<x_1<\varphi_2(t_1))$ としよう.

この点では明らかに $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\leq 0,\dfrac{\partial v}{\partial t}\geq 0$. (実際, $t_1<T$ なら $\dfrac{\partial v}{\partial t}=0$ で $t=T$ なら $\dfrac{\partial u}{\partial t}>0$) でなければならない. したがって (x_1,t_1) で

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\geq 0 \tag{7}$$

である. ところが一方 v の定義により $\overline{D}$ のすべての点で

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{M-m}{2\ell^2}=-\frac{M-m}{2\ell^2}<0$$

これは (7) に矛盾する. ■

系 1 熱方程式の Dirichlet 問題の解は D で一意的である.

(証明) 2 つの解を u,v として $w=u-v$ とおくと
$w|_\Gamma=u|_\Gamma-v|_\Gamma=0$. よって定理 2 から $\overline{D}$ で恒等的に 0. ■

系 2 熱方程式の Dirichlet 問題の解は Γ 上の境界条件に関して連続的に変化する.

(証明) 2 つの解を u,v として $w=u-v$ とすると

$$\max_{\overline{D}}\,(u-v)\leq\max_{\Gamma}\,(u-v)$$

$$\min_{\overline{D}} (u-v) \le \min_{\Gamma} (u-v)$$

これは連続性を表している. ■

6.3 熱方程式の Dirichlet 問題の解法

次の熱方程式の Dirichlet 問題を考える：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (x,t) \in [0,\pi] \times [0,\infty) \tag{8}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad \text{初期値} \tag{9}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad t \in [0,\infty) \tag{10}$$

変数分離法を用いる：

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

と分離されたとする. (8) に代入して

$$\begin{aligned} T'(t)X(x) &= X''(x)T(t) \\ \frac{T'(t)}{T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \end{aligned}$$

λ は左辺から x に依存しない, 第 2 項から t に依存しないから定数となる. よって

$$\begin{cases} T'(t) = \lambda T(t) \\ X''(x) = \lambda X(x) \end{cases} \tag{11}$$

一般に熱方程式, 波動方程式はこのように変数分離をすると $X(x)$ の項は 1 次元下がった空間での Laplace 方程式の固有値問題の解を求める問題に帰着される.

(10) より

$$X(0) = X(\pi) = 0 \tag{12}$$

(11) の第 2 式に $X(x)$ をかけて $[0,\pi]$ で積分する (この方法を energy 積分の方法という) と

$$\int_0^\pi X''(x)X(x)dx = \lambda \int_0^\pi X(x)^2 dx$$

左辺を部分積分して (12) を用いて

$$-\int_0^\pi X'(x)^2 dx = \lambda \int_0^\pi X(x)^2 dx$$

よって $\lambda < 0$ となる.

$$\lambda = -\mu^2$$

とおくと (11) の第 2 式は

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$$

となり

$$X(x) = A_\mu \cos \mu x + B_\mu \sin \mu x$$

となる. (12) から

$$X(0) = A_\mu = 0$$

これを代入して

$$X(x) = B_\mu \sin\, \mu x$$

$x = \pi$ を代入して

$$X(\pi) = B_\mu \sin\, \mu\pi = 0$$

$\sin\, \mu\pi = 0$ より

$$\mu\pi = n\pi, \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

となる. (11) の第 1 式から

$$T'(t) = -n^2 T(t) \quad \text{より} \quad T_n(t) = e^{-n^2 t}$$

となり, 重ね合わせの原理により

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 t} \sin\, nx$$

となる. ここで $t \downarrow 0$ とすると

$$u(x,0) = \varphi(x) = \lim_{t\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 t} \sin\, nx = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\, nx$$

それゆえ $\varphi(x)$ が Fourier 級数に展開されていればそれから解 $u(x,t)$ がわかる. すなわち

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 t} \sin\, nx$$

これが解であることは証明の必要がある. 使う定理は項別微分の定理である. 一言でいえば形式的に微分した級数が一様収束すれば, 極限関数の微分は項別微分した級数の極限になることである. 解の一意性については前節の系 1 である. ■

2006/9/19 版