第 7 章 非線形偏微分方程式

§7.0. 第 7 章の目次

§7.1. 準備

7.1.1. Green の公式

n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の境界がなめらかな領域を Ω としその境界を Γ とする. Laplace 作用素を $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_n^2$ とし $\mathrm{grad} = \nabla = (\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n)$ とする. $H_0^1(\Omega)$ は無限回微分可能な関数でサポート (関数がゼロでない集合の閉包) が Ω でコンパクトな関数のノルム $\|u\|^2 = |u|^2 + |\nabla u|^2$ に関する完備化をした関数空間とする (cf.§7.1.3.). ここに $|u|^2 = \int_\Omega u(x)^2 dx$ を表す. このとき次の Green の公式が成立する.

命題 1.1.

$$\int_\Omega (\Delta uv + \mathrm{grad}\, u \cdot \mathrm{grad}\, v) dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v dS \tag{1.1}$$

ここで $u = v \in H_0^1(\Omega)$ とおくと

$$-\int_\Omega \Delta uu\, dx = \int_\Omega |\mathrm{grad}\, u|^2 dx = \|u\|^2$$

7.1.2. Hölder の不等式

命題 1.2.

$$\left| \int_\Omega f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g(x)|^q dx \right)^{1/q} \tag{1.2}$$

が成立する. ここに

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 1, q > 1$$

上の不等式が等号となるのは $f(x)$ と $g(x)$ が比例するときである.

Example 1

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x)^2 dx &\le \int_\Omega f(x)^2\cdot 1\,dx\\ &\le \Big(\int_\Omega |f(x)|^{2p}dx\Big)^{1/p}\Big(\int_\Omega 1\,dx\Big)^{1/q}\\ &= \Big(\int_\Omega f(x)^{2p}dx\Big)^{1/p}|\Omega|^{\frac{p-1}{p}}\end{aligned}$$

(Hölder の不等式の証明の outline)

$p,q>1, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ のとき, 次が示せる

$$\begin{aligned}|ab| &\le \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\\ |\sum_{i=1}^n a_ib_i| &\le \frac{1}{p}\Big(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\Big)+\frac{1}{q}\Big(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\Big)\\ \Big|\int f(x)g(x)dx\Big| &\le \frac{1}{p}\int |f(x)|^p dx+\frac{1}{q}\int |g(x)|^q dx\end{aligned}$$

第 1 の不等式は

$$f(x)=\frac{1}{p}x^p-x+\frac{1}{q}$$

の増減を $x>0$ で調べ, $x=a/b^{p/(p-1)}$ とおくことから得られる. 第 3 の不等式から $\int |f(x)|^p dx=1, \int |g(x)|^q dx=1$ のとき,

$$\Big|\int f(x)g(x)dx\Big| \le \frac{1}{p}\int |f(x)|^p dx+\frac{1}{q}\int |g(x)|^q dx=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \tag{1.3}$$

となる. これから一般の場合は

$$f_1(x)=\frac{f(x)}{\Big(\int |f(x)|^p dx\Big)^{1/p}}, g_1(x)=\frac{g(x)}{\Big(\int |g(x)|^q dx\Big)^{1/q}}$$

とおくと

$$\int |f_1|^p dx=1, \int |g_1(x)|^q dx=1$$

となり, $f_1(x), g_1(x)$ に (1.3) を適用すれば, ただちに Hölder の不等式が得られる. ■

7.1.3. Poincaré の不等式

命題 1.3. $u\in H_0^1(\Omega)$ にたいし Ω のみに依存する定数 $\mathrm{const}(\Omega)$ が存在し

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx \le \mathrm{const}(\Omega)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

$L^2(\Omega) = H = \{f(x) \mid \int_\Omega |f(x)|^2 dx < \infty\}$
$H^1(\Omega) = \{f(x) \mid \|f\|^2 = \int_\Omega |f(x)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla f(x)|^2 dx < \infty\}$
$H_0^1(\Omega) = V$ は無限回微分可能な関数でサポート(関数がゼロでない集合の閉包) が Ω でコンパクトな関数のノルム $\|u\|^2 = |u|^2 + |\nabla u|^2$ に関する完備化をした関数空間とする.

このとき, Poincaré の不等式から $H_0^1(\Omega)$ では $0 < C_1 < C_2$ が存在して

$$C_1 |\nabla u| \leq \|u\| \leq C_2 |\nabla u|$$

が成立する.

(Poincaré の不等式の証明の outline)

次は [溝畑茂, 偏微分方程式論, 岩波書店, 1965,p.152] による.

$u \in \mathcal{D}(\Omega)$ とする. たとえば最初の変数について

$$u(x_1, \cdots, x_n) - u(a_1, \cdots, x_n) = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdots, x_n) dt$$

から $u(a_1, \cdots, x_n) = 0$ から

$$|u(x)|^2 \leq \int_{a_1}^{x_1} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdots, x_n) \right|^2 dt (x_1 - a_1)$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ について積分して $\operatorname{diam} \Omega = d$ とおくと

$$\int_\Omega \left| u(x) \right|^2 dx \leq \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx \cdot \frac{d^2}{2}$$

■

7.1.4. 距離空間

定義 1.1. 集合 X の任意の 2 点 x, y にたいし, 距離 (metric) $d(x, y)$ が次の公理を満たすとき, 距離空間 (metric space) という :

(1) $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y$ (正値性)
(2) $d(y, x) = d(x, y)$ (対称性)
(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (３角不等式)

距離空間が完備なとき, すなわち Cauchy 列が収束するとき**完備距離空間**という.

例 1. $\mathbf{R}^n$ は完備距離空間となる. $\mathbf{R}^n \ni x, y$ にたいし

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

とする.

例 2. $\ell^2 = \{x = \{x_i\}_{i=1}^\infty \mid \sum_{i=1}^\infty x_i^2 < \infty \}$ は完備距離空間となる. $x, y \in \ell^2$ にたいし

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

とする.

例 3. $L^2(\Omega) = \{f(x) \mid \int_\Omega f(x)^2 dx < \infty\ \}$ は完備距離空間となる. $f, g \in L^2(\Omega)$ にたいし

$$d(f,g) = \left(\int_\Omega (f(x)-g(x))^2 dx\right)^{1/2}$$

とおく.

さらに $H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$ は完備距離空間となる.

7.1.5. 作用素の半群

定義 1.2. $\{S(t) \mid t \geq 0\}$ は作用素

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H \\ \Cup & & \Cup \\ x & \longrightarrow & S(t)x \end{array}$$

で次の 3 つの性質を持つとき**半群**であるという.

$$\begin{array}{ll} S(t+s) = S(t)S(s), & \forall s, t \geq 0 \\ S(0) = I & \quad H \text{ の恒等作用素} \\ S(t) & H \text{ から } H \text{ への作用素として連続} \end{array}$$

軌道 orbit または trajectory $x_0 \in H$ にたいし $\{S(t)x_0 \mid t \geq 0\ \}$

定義 1.3. $X \subset H$ にたいし

$$S(t)X = X \qquad \forall t \geq 0$$

となるとき X を $\{S(t)\}$ の**不変集合**という.

定義 1.4. $\mathcal{A} \subset H$ が**アトラクター (attractor)** であるとは

(i) $\mathcal{A}$ は半群 $\{S(t)\}$ の不変集合 : *i.e.*

$$S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$$

(ii) $\exists$ 開近傍 $\mathcal{U}$ $\quad \forall u_0 \in \mathcal{U}$

$$d(S(t)u_0, \mathcal{A}) \to 0 \text{ as } t \to \infty$$

(ここに $d(S(t)u_0, \mathcal{A}) = \inf_{x \in \mathcal{A}} d(S(t)u_0, x)$)

定義 1.5. $\mathcal{B} \subset H$, $\mathcal{U}$ 開近傍 $\supset \mathcal{B}$ なる $\mathcal{B}$ が $\mathcal{U}$ で **absorbing(吸引的)** であるとは $\mathcal{U}$ の有界集合の軌道は $\mathcal{B}$ に含まれる. $\forall \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{U}$ $\ \mathcal{B}_0$: 有界にたいし

$$\exists t_1(\mathcal{B}_0) \qquad \text{such that} \qquad S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}, \qquad \text{for} \quad \forall t \geq t_1(\mathcal{B}_0)$$

半群の性質は次の２つにまとめられる：

$$
\begin{aligned}
&S(t+s) = S(t)S(s) \qquad \text{for } \forall s,t \geq 0, \\
&S(0) = I = id_H
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

$$S(t) \text{ は } t \geq 0 \text{ で } H \to H \text{ の連続作用素} \tag{1.5}$$

さらに次の条件をつける

$$
\begin{aligned}
&S(t) \text{ は } t \text{ 大にたいし一様コンパクト } i.e. \quad \forall \text{ 有界集合} \mathcal{B} \text{ にたいし} \\
&\exists t_0 \quad \textstyle\bigcup_{t\geq t_0} S(t)\,\mathcal{B} \text{ は } H \text{ で relative compact}
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

このとき次のアトラクターの存在の定理を得る：

定理 1. H は距離空間 作用素 $\{S(t)\}$ は (1.4),(1.5),(1.6) をみたす.
$\exists\,\mathcal{U}$ 開集合, $\mathcal{B}$ 有界集合 $\subset \mathcal{U}$, $\mathcal{B}$ は $\mathcal{U}$ で absorbing
$\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ の ω–limit set $\mathcal{A}=\omega(\mathcal{B})$ は compact attractor
$\mathcal{U}$ の有界集合を attract する. それは $\mathcal{U}$ の極大アトラクター
上の仮定に加えて H は Banach space で $\mathcal{U}$ は convex,connected
$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ もまた connected

§7.2. 反応拡散方程式の解の存在と一意性の定理

連立常微分方程式のところで魚とサメの方程式系 (prey–predator) を取り扱った.

$$
\begin{cases}
\dfrac{du}{dt} &= au - buv \\[2ex]
\dfrac{dv}{dt} &= -cv + duv
\end{cases}
$$

これを移動をともなう拡散項をいれると

$$
\begin{cases}
\dfrac{du}{dt} &= -\mu\Delta u + au - buv \\[2ex]
\dfrac{dv}{dt} &= -\lambda\Delta v - cv + duv
\end{cases}
$$

となる.魚とサメの例でも厳密に言えば拡散項があるのが自然である. このような例は野ウサギとオオヤマネコの個体群の方程式がある. これらの方程式は反応拡散方程式 (reaction–diffusion equation) と総称されている.

未知関数が 1 つの場合, Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界領域, $\Gamma = \partial\Omega$ は十分なめらかとする. $g(s)$ は奇数次の多項式でその最高次の係数が正とする：

$$g(s) = \sum_{j=0}^{2p-1} b_j s^j, \qquad b_{2p-1} > 0 \tag{2.1}$$

次の境界値問題を考える：

$$
(\mathrm{P})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - d\Delta u + g(u) = 0 & \text{in } \Omega \qquad (2.2) \\ u = 0 & \text{on } \quad \Gamma \qquad (2.3) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \qquad (2.4) \end{cases}
$$

$H = L^2(\Omega),\ V = H_0^1(\Omega)$

定理 2. (解の存在と一意性の定理)
$\forall u_0 \in H \ \Rightarrow\ \exists u$ (P) の解 such that

$$u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \bigcap L^{2p}(0,T;L^{2p}(\Omega)), \quad \forall T > 0 \tag{2.5}$$

$$u \in \mathcal{C}(\mathbf{R}_+;H) \tag{2.6}$$

$$u_0 \longmapsto u(t) \qquad H \text{ で連続}$$

$$\text{さらに } u_0 \in H_0^1(\Omega) \text{ なら } C([0,T];V) \bigcap L^2(0,T;H^2(\Omega)), \ \ \forall T > 0$$

定理 1 により半群 $S(t) : u_0 \longmapsto u(t)$ が定義でき, Absorbing set とアトラクターの存在がいえる.

(定理 2 の証明のスケッチ)
$V = H_0^1(\Omega),\ H = L^2(\Omega),\ A = -d\Delta$ は 2 次形式

$$a(u,v) = d\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$$

から得られる線型作用素とする. A の固有ベクトル

$$Aw_j = \lambda_j w_j,\ \forall j$$

からなる H の正規直交基底 $\{w_j\}$ をとりこれらの関数に関する Faedo–Galerkin 法を適用する. $\forall m$ 正の整数にたいし

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \tag{2.7}$$

w_j との内積をとって

$$(\frac{du_m}{dt}, w_j) + a(u_m, w_j) + (g(u_m), w_j) = 0 (j = 1, 2, \cdots, m) \tag{2.8}$$

$$u_m(0) = u_{0m} \tag{2.9}$$

u_{0m} は H の $w_1, w_2, \cdots, w_m$ により張られる空間への直交射影である.
ある区間 $[0, T_m]$ での u_m の存在は常微分方程式の解の存在と一意性の定理の結果から結論される; $T_m = +\infty$ はこれらの結果と a priori 評価から得られる.

最初のエネルギー型の等式は (2.8) に g_{jm} をかけて j について 1 から m まで和をとってえられる. その結果次式を得る：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2 + d\|u_m\|^2 + \int_\Omega g(u_m)u_m dx = 0$$

$\forall T > 0$ にたいし, u_m は

$$L^\infty(0,T;H),\ L^2(0,T;V) \text{ と } L^{2p}(0,T;L^{2p}(\Omega)) \tag{2.10}$$

で m に無関係に有界である.

以下の議論に必要な定理は次のようである：

命題 2.1.(Ascoli-Arzelà) 有界閉集合上で定義された一様有界, 同程度連続な連続関数の族から, 一様収束部分列を取り出すことが出来る.

補題 2.2. 有界閉集合上で定義された 一様有界な連続関数族でその導関数も一様有界ならば, 一様収束部分列を取り出すことが出来る.

命題 2.3. (Rellich の選出定理) 有界閉集合上で定義された V の有界集合は, H での収束部分列を取り出すことが出来る.

Ascoli-Arzelà の定理の証明はたとえば [溝畑茂, 数学解析 (上), 朝倉書店, 1975, p.252] を参照せよ. Rellich の定理の証明は [溝畑茂, 偏微分方程式論, 岩波書店, 1975, p.155] を参照せよ. 証明のキーポイントは Fourier 変換して Ascoli–Arzelà の定理に帰着することにある.

弱コンパクト性により $\{u_m\}$ の部分列をやはり $\{u_m\}$ とかいて

$$u_m \longrightarrow u \qquad \text{in } L^2(0,T;V)\bigcap L^{2p}(0,T;L^{2p}(\Omega)) \tag{2.11}$$

$$u_m \longrightarrow u \qquad \text{in } L^\infty(0,T;H) \text{ weak star} \tag{2.12}$$

(2.8) と (2.9) を極限移行して

$$\frac{d}{dt}(u,v) + a(u,v) + (g(u),v) = 0 \qquad \forall v \in V\bigcap L^{2p}(\Omega)$$

線型の場合と比べてここでの困難さは弱い意味で $g(u_m)$ が $g(u)$ に収束すると言うことである. それはクラシカルなコンパクトネスの議論による. それはここでは述べない. (cf. [Lions,Quelques Méthodes $\cdots\cdots$,Dunod,1969].)

u は

$$\frac{du}{dt} + Au + g(u) = 0 \tag{2.13}$$

をみたす. それは $u' = -Au - g(u)$ を

$$L^2(0,T;V') + L^q(0,T;L^q(\Omega))$$

で考える, ここに q は $2p$ の共役指数である $(1/q+1/(2p)=1)$. この空間は

$$L^2(0,T;V)\bigcap L^{2p}(0,T;L^{2p}(\Omega))$$

の dual 空間である. ここで次の補題を使う. 証明は Temam を参照せよ.

補題 2.4. V,H,V' は 3 つの Hilbert 空間, V' は V の dual 空間で

$$V\subset H\subset V'$$

関数 $u\in L^2(0,T;V)$ その導関数 $u'\in L^2(0,T;V')$
$\Rightarrow$ u はほとんど至るところで $[0,T]$ から H への連続関数に等しい.
そして $(0,T)$ の scalar distribution の意味で次が成立する:

$$\frac{d}{dt}|u|^2=2\langle u,u'\rangle.$$

証明は [Temam,Navier–Stokes Equations, North–Holland,1986, Chap.III,Lemma 1.2] を見よ. そしてこの補題 2.4 の少しの変形で $u\in\mathcal{C}(0,T;H)$ である. それゆえに $u(0)$ は意味を持ち (2.4) は (2.8) から極限移行して得られる.

定理 2 の一意性と u_0 への連続依存性は通常の方法により証明される. さらに解の正則性の結果は次の等式

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2+d|\Delta u|^2+\int_\Omega g'(u)|\nabla u|^2dx=0 \tag{2.13}$$

に類似する energy 型等式を導くことから得られる. この関係は (2.8) に $\lambda_j g_{jm}$ をかけて [Temam, Infinite Dimensional $\cdots$,Springer,1988, Chap.III, Chap.II,(3.34),p.71] をもちいて $j=1,\cdots,m$ の和をとることから得られる. (2.13) で u を u_m に変えて [Temam, Infinite Dimensional $\cdots$,Springer,1988, Chap.III,(1.17),p.84] に続く計算をほぼそのまま繰り返して我々は次を得る:

$$u_m \text{ は } L^2(\eta,T;V) \text{ と } L^2(\eta,T;H^2(\Omega)) \text{ で } m \text{ に依存しないで有界} \tag{2.14}$$

ここで $u_0\in H_0^1(\Omega)$ なら $\eta=0$, $\eta>0$ なら $u_0\in L^2(\Omega)$ なら $\eta>0$ である. $m\to\infty$ として

$$u\in\mathcal{C}((0,T);V)\bigcap L^2(\eta,T;H^2(\Omega))\ \text{ for }\ \forall\eta>0\ \text{ if }\ u_0\in L^2(\Omega) \tag{2.15}$$

$$u\in\mathcal{C}([0,T];V)\bigcap L^2(0,T;H^2(\Omega))\qquad\qquad \text{if }\ u_0\in V=H_0^1(\Omega) \tag{2.16}$$

こうして u の連続性と関係 (2.13) は補題 2.4 を少し変えた近似より得られる.

§7.3. Absorbing sets とアトラクター

通常 Absorbing sets の存在の証明は a priori 評価の証明と等しい. 考慮中の方程式にたいして H と V での absorbing sets の存在を示すことが出来る.

Young の不等式を用いて (2.1) から定数 c_1' にたいして

$$\left|\sum_{j=0}^{2p-2} b_j s^{j+1}\right| \le \frac{1}{2} b_{2p-1} s^{2p} + c_1', \quad \forall s$$

がなりたつ, それゆえ

$$\frac{1}{2} b_{2p-1} s^{2p} - c_1' \le g(s)s \le \frac{3}{2} b_{2p-1} s^{2p} + c_1' \qquad \forall s \in \mathbf{R} \tag{3.1}$$

(2.2) に u をかけて Ω で積分する. (2.3) と Green の公式を用いて我々は

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + d\|u\|^2 + \int_\Omega g(u)u dx = 0 \tag{3.2}$$

(3.1) により

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + 2d\|u\|^2 + \int_\Omega b_{2p-1} u^{2p} dx \le 2c_1'|\Omega| \tag{3.3}$$

Poincaré の不等式を用いて $\exists c_0 = c_0(\Omega)$ にたいし

$$|u| \le c_0\|u\|, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

$c_2' = c_1'|\Omega|$ とおいて (3.3) から

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + \frac{2d}{c_0^2}|u|^2 \le 2c_2'.$$

Gronwall の不等式を用いて

$$|u(t)|^2 \le |u_0|^2 \exp\Big(-\frac{2d}{c_0^2}t\Big) + \frac{c_2' c_0^2}{2d}\left(1 - \exp\Big(-\frac{2d}{c_0^2}t\Big)\right) \tag{3.4}$$

こうして

$$\limsup_{t\to+\infty} |u(t)| \le \rho_0, \qquad \rho_0^2 = \frac{c_2' c_0^2}{2d}. \tag{3.5}$$

これは H に absorbing sets $\mathcal{B}_0$ があることを示す.

<u>$H_0^1(\Omega)$ での Absorbing sets.</u>

$H_0^1(\Omega)$ での Absorbing sets の存在と $S(t)$ の一様 compact 性の証明をする. その目的のため我々は (3.2) と類似した他の energy 型の等式が必要である. (2.2) に $-\Delta u$ をかけて Ω で積分して得られる. 我々は (2.3) と Green の公式を適用して

$$-\int_\Omega \Delta u \frac{\partial u}{\partial t} dx = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2$$

$$-\int_\Omega \Delta u g(u)dx = -\int_\Omega g(u)\Delta u dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega g'(u)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)^2 dx$$

を得る．それ故

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + d|\Delta u|^2 + \int_\Omega g'(u)|\nabla u|^2 dx = 0 \tag{3.6}$$

を得る．(3.1) と同様に Young の不等式を再び適用して $c_3' > 0$ にたいし

$$\frac{2p-1}{2}b_{2p-1}s^{2p-2} - c_3' \le g'(s) = \sum_{j=0}^{2p-1} jb_j s^{j-1} \le \frac{3}{2}(2p-1)b_{2p-1}s^{2p-2} + c_3' \quad \forall s \in \mathbf{R} \tag{3.7}$$

を満たすものが存在することが示せる．Ω における Dirichlet 問題の一般論から $|\Delta u|$ は $H_0^1(\Omega)\bigcap H^2(\Omega)$ で $H^2(\Omega)$ で導入されたノルムと同値である；それ故 $\exists c_1 = c_1(\Omega)$

$$\|u\| \le c_1|\Delta u|, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

$c_4' = \dfrac{1}{2}(2p-1)b_{2p-1} > 0$ とおいて (3.7) から

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \Big(\frac{d}{c_1'^2} - c_3'\Big)\|u\|^2 + c_4'\int_\Omega u^{2p-2}|\nabla u|^2 dx \le 0 \tag{3.8}$$

を導く．特に

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 \le 2c_3'\|u\|^2. \tag{3.9}$$

$u \in V(= H_0^1(\Omega))$ ならば普通の Gronwall の補題により

$$\|u(t)\|^2 \le \|u_0\|^2 \exp(2c_3't), \qquad \forall t > 0 \tag{3.10}$$

を示す．$t \in \mathbf{R}_+$ に対する有効な有界性は次の一様 Gronwall の補題を適用すればよい．

補題 3.1. g, h, y は $[t_0, \infty)$ での正の局所可積分関数, y' は $[t_0, \infty)$ で局所可積分で次を満たす：

$$\frac{dy}{dt} \le gy + h, \qquad \text{for } t \ge t_0 \tag{3.11}$$

$$\int_t^{t+r} g(s)ds \le a_1, \int_t^{t+r} h(s)ds \le a_2, \int_t^{t+r} y(s)ds \le a_3 \quad \text{for } t \ge t_0 \tag{3.12}$$

ここに a_1, a_2, a_3 は定数である．このとき次式が成立する：

$$y(t+r) \le \Big(\frac{a_3}{r} + a_2\Big)\exp(a_1), \qquad \forall t \ge t_0 \tag{3.13}$$

この補題の証明は [Temam,Infinite Dimensional $\cdots$, Springer, 1988,Chap.III,Lemma 1.1,p.89] を参照せよ．証明のキーポイントは (3.11) に $\exp(-\int_s^t g(\tau)d\tau)$ をかけて得られる式を s から $t+r$ まで積分する．その式をさらに s について t から $t+r$ まで積分することにある．

結論として仮定 (1.4),(1.5),(1.6) がみたされる．そして H で absorbing set $\mathcal{B}_0$ の存在が証明された．定理 1 を $\mathcal{U}= H$ として適用すれば, 次の定理が得られる．

定理 3. Ω は $\mathbf{R}^n$ の有界集合とし, g は (2.1) をみたす多項式とする. 境界値問題 (2.2)–(2.4) は $H_0^1(\Omega)$ で有界で, $L^2(\Omega)$ で compact な極大アトラクターをもつ. その atttraction の basin(基盤) は $L^2(\Omega)$ 全体である. $\mathcal{A}$ は $L^2(\Omega)$ の有界集合を attract する.

§7.4. 神経伝達の方程式等

Ω は $\mathbf{R}^n$ の有界閉領域とし, $\partial\Omega = \Gamma$ はその境界とする. $u = (u_1, u_2, \cdots, u_\ell)$ は $\Omega \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^\ell$ のベクトル値関数とする.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & & \text{\huge 0} \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & d_\ell \end{bmatrix}, \qquad d_i > 0$$

ここに $\Omega = \prod_{i=1}^n (0, L_i)$

$$u_i = 0 \qquad \text{on } \Gamma \qquad \forall i$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega$$

例 1. (Hodgkin–Huxley の方程式)
$n = 1, \Omega = (0, L), m = 4, u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} &= d_1 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - g_1(u_1, u_2, u_3, u_4) \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} &= d_2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + k_1(u_1)(h_1(u_1) - u_2) \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} &= d_3 \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + k_2(u_1)(h_2(u_1) - u_3) \\ \dfrac{\partial u_4}{\partial t} &= d_4 \dfrac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + k_3(u_1)(h(u_1) - u_4) \end{cases}$$

ここに

$$g_1(u) = -\gamma_1 u_2^3(\delta_1 - u_1) - \gamma_2 u_4^4(\delta_1 - u_1) - \gamma_3(\delta_3 - u_1)$$

さらに $\delta_1 > \delta_3 > 0 > \delta_2, k_i > 0, 1 > h_i > 0, (i = 1, 2, 3)$

例 2. (Fitz–Hue–Nagumo の方程式)
$n = 1, \Omega = (0, L), m = 2, u = (u_1, u_2)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} &= d_1 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + h(u_1) - u_2 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} &= d_2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \delta u_1 - \gamma u_2 \end{cases}$$

ここに $d_i, \gamma, \delta > 0$ かつ

$$h(u_1) = -u_1(u_1 - \beta)(u_1 - 1), \qquad \beta < \frac{1}{2}.$$

例 3. (Keller–Segel の粘菌の方程式)
$n = 1, \Omega = (0, L), m = 2, u = (u_1, u_2)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v) & x \in \Omega, t > 0 \\[2ex] \tau \dfrac{\partial v}{\partial t} & = & \Delta v - \gamma v + u & x \in \Omega, t > 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial n} & = & \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & x \in \Omega, t > 0 \\[2ex] u(x, 0) & = & u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

鈴木, 仙葉,Nagai

2006/9/19 版