第 3 章 常微分方程式の解の存在と一意性

§3.0. 第 3 章の目次

§3.1. 解の存在定理の証明方法と Gronwall の不等式

3.1.1. 解の存在定理の証明方法

解の存在定理の証明方法は縮小写像の原理である. これは数列の収束, 陰関数の存在定理, 常微分方程式の解の存在定理等に現れる. 数列の場合に次のように表現できる.

数列の収束定理は $y = f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ から閉区間 $[a, b]$ への関数で, ある正の数 $0 < r < 1$ が存在して

$$|f(x) - f(y)| \leq r|x - y| \qquad \forall x, y \in [a, b] \tag{3.1}$$

が成り立つならば, $\exists \alpha \in [a, b]$ で $\alpha = f(\alpha)$ となる.

これを証明するために $\forall a_0 \in [a, b]$ をとり,

$$a_{n+1} = f(a_n), \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{3.2}$$

とすると, (3.1) から $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ があることが示され, それから極限を α とおけばそれが求めるものである.

$$\begin{cases} x_{n+1} &= \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right) \\ \\ x_0 &= 1 \end{cases}$$

は $y = x^2 - 2$ の Newton 法であるが上の例になっている. 極限を求める図–1 を参照のこと.

常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

の解があったとすると,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$$

となる. 右辺を $F(x, y(x))$ とおくと上の式は

$$y(x) = F(x, y(x))$$

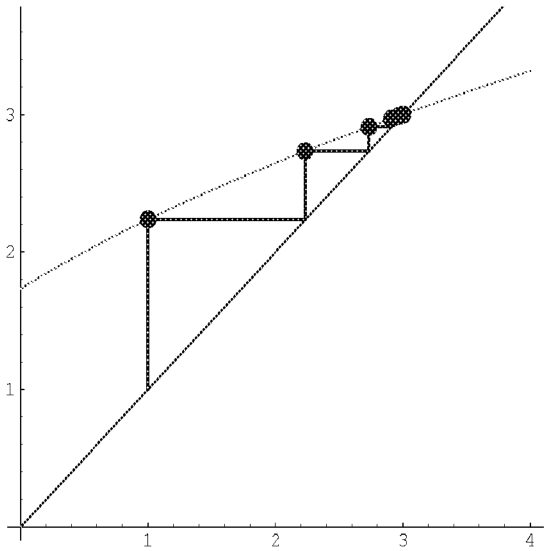

図 1: 極限

となり, 解 $y(x)$ は $y(x) \longrightarrow F(x, y(x))$ の固定点である. 解を求めるために次の逐次近似列を作る：

$$\begin{cases} y_0(x) & = & y_0 \\ \\ y_{k+1}(x) & = & y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s, y_k(s))\, ds \quad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

数列の時と同様に $y_k(x)$ の収束性がいえれば解の存在がわかる.

例 3.1. 次の初期値問題を考える：

$$\begin{cases} y'(x) & = & xy(x) \\ y(0) & = & 1 \end{cases}$$

これは次の逐次近似列をから解が構成される

$$\begin{cases} y_0(x) & = & 1 \\ y_k(x) & = & 1 + \displaystyle\int_0^x s y_{k-1}(s)\, ds \quad (k = 1, 2, 3 \cdots) \end{cases}$$

順次に積分して解の逐次近似列を求めると

$$
\begin{array}{rcl}
y_1(x) & = & 1+\int_0^x s\,ds & = & 1+\dfrac{x^2}{2} \\
y_2(x) & = & 1+\int_0^x s\Big(1+\dfrac{s^2}{2}\Big)\,ds & = & 1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4\cdot 2} \\
y_3(x) & = & 1+\int_0^x s\Big(1+\dfrac{s^2}{2}+\dfrac{s^4}{4\cdot 2}\Big)\,ds & = & 1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4\cdot 2}+\dfrac{x^6}{6\cdot 4\cdot 2} \\
\cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
y(x) &= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2\cdot 1}\Big(\frac{x^2}{2}\Big)^2+\frac{1}{3\cdot 2\cdot 1}\Big(\frac{x^2}{2}\Big)^3+\cdots \\
&= e^{x^2/2}
\end{aligned}
$$

例 3.2. 次の初期値問題を考える：

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= xy(x)+1 \\
y(0) &= 1
\end{aligned}
$$

これは次の逐次近似列をから解が構成される

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= 1 \\
y_k(x) &= 1+\int_0^x (sy_{k-1}(s)+1)\,ds \quad (k=1,2,3\cdots)
\end{aligned}
$$

順次に積分して解の逐次近似列を求めると

$$
\begin{array}{rcl}
y_1(x) & = & 1+\int_0^x (s+1)\,ds & = & 1+\dfrac{x^2}{2}+x \\
y_2(x) & = & 1+\int_0^x \Big\{s\Big(1+\dfrac{s^2}{2}+s\Big)+1\Big\}\,ds & = & 1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4\cdot 2}+\dfrac{x^3}{3}+x \\
y_3(x) & = & 1+\int_0^x \Big\{s\Big(1+\dfrac{s^2}{2}+\dfrac{s^4}{4\cdot 2}\Big)+1\Big\}\,ds & = & 1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4\cdot 2}+\dfrac{x^6}{6\cdot 4\cdot 2}+\dfrac{x^5}{5\cdot 3}+\dfrac{x^3}{3}+x \\
\cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
y(x) &= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2\cdot 1}\Big(\frac{x^2}{2}\Big)^2+\frac{1}{3\cdot 2\cdot 1}\Big(\frac{x^2}{2}\Big)^3+\cdots+x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 3}+\cdots \\
&= e^{x^2/2}+x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 3}+\cdots
\end{aligned}
$$

実際, 例 2 を求積法で求めれば

$$e^{x^2/2} + e^{x^2/2}\int e^{-s^2/2}\,ds$$

となり, 第 2 項の求積法の部分は計算できないが近似的には巾級数でいくらでも近づけられる.

3.1.2. Gronwall の不等式

補題 3.1. (Gronwall の不等式)　$y(x) \in C^1[a,b]$,
$p(x) \in C^0[a,b], p(x) \geq 0 \quad x \in [a,b]$
$q(x) \in C^1[a,b]$ さらに次の不等式が成立すると仮定する：

$$y(x) \leq q(x) + \int_a^x p(s)y(s)\,ds \tag{3.3}$$

このとき次式が成立する：

$$y(x) \leq q(x) + e^{\int_a^x p(t)dt} \int_a^x q(t)p(t)e^{-\int_a^t p(s)ds}dt \tag{3.4}$$

とくに, $q(x) = q(\mathrm{const})$ の場合には

$$y(x) \leq q e^{\int_a^x p(t)dt} \tag{3.5}$$

が成り立つ.

(証明)

不等式 (3.3) の右辺を $z(x)$ とおく：

$$z(x) = q(x) + \int_a^x p(s)y(s)\,ds$$

微分して

$$z'(x) = q'(x) + p(x)y(x)$$

(3.3) を代入して

$$z'(x) \leq q'(x) + p(x)z(x)$$

$P(x) = e^{-\int_a^x p(t)dt}$ とおき, $P(x)$ をかけて

$$\begin{aligned} &z'P \leq q'P + pzP \\ &z'P - pzP = (zP)' \leq q'P \end{aligned}$$

x について a から x まで積分して

$$z(x)P(x) - z(a)P(a) \leq \int_a^x q'(t)P(t)\,dt$$

$P(a) = 1$ より

$$z(x)P(x) \leq z(a) + \int_a^x q'(t)P(t)\,dt$$

$P(x) > 0$ より

$$z(x) \leq q(a)P(x)^{-1} + P(x)^{-1}\int_a^x q'(t)P(t)\,dt$$

最後の項を部分積分して

$$z(x) \leq q(a)P(x)^{-1} + P(x)^{-1}\Big[q(x)P(x) - q(a)P(a) - \int_a^x q(t)P'(t)\,dt\Big]$$

$$= q(a)P(x)^{-1} + q(x) - q(a)P(x)^{-1} + P(x)^{-1}\int_a^x q(t)p(t)P(t)\,dt$$

$$= q(x) + \int_a^x q(t)p(t)P(t)\,dt \times P(x)^{-1}$$

とくに $q(x) = q(\mathrm{const})$ の時には

$$\begin{aligned} y(x) &\leq q + P(x)^{-1}q\int_a^x p(t)P(t)\,dt \\ &= q + P(x)^{-1}q(-P(x) + P(a)) \\ &= q - q + qP(x)^{-1} \\ &= qe^{\int_a^x p(t)dt} \end{aligned}$$

■

§3.2. 解の存在定理と一意性の証明

微分方程式系

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.6}$$

に対する解の存在と一意性の定理を考察する. 本質的な難しさは $n = 1$ の場合に説明すれば, 方程式の個数を増やすことは空間のノルムの問題である. それゆえ $n = 1$ として次の初期値問題を取り扱う. 方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)) \tag{3.7}$$

と初期条件

$$y(x_0) = y_0 \tag{3.8}$$

となる解 $y(x)$ の存在を以下に示す.

定義 3.1. 関数 $f(x, y)$ は

$$R \ : \ |x - x_0| \leq a, \ |y - y_0| \leq b \tag{3.9}$$

で定義され, $\exists K > 0$ で $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in R$ にたいし

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2| \tag{3.10}$$

を満たすとき, $f(x, y)$ は R で Lipschitz 条件を満たすという.

初期値問題が Lipschtz 条件を満たさないなら, 解の一意性が成立しない例を示そう. そのときでも解の存在はいえることに注意しておこう.

例 3.3. 初期値問題

$$\begin{cases} y' & = & 2y^{1/2} \\ y(0) & = & 0 \end{cases}$$

$y^{1/2}$ は Lipschitz 条件を満たさない. このとき,

$$y_c(x) = \begin{cases} 0 & x \leq c \\ (x - c)^2 & x > c \end{cases}$$

とすると, c 毎に解がある. それゆえ, この初期値問題の解は無数にある.

定理 3.2. $f(x, y)$ は長方形 R で定義され, R 上で連続で, $|f(x, y)| \leq M$ であると仮定する. さらに R 上で Lipschitz 条件を満たすと仮定する.

そのとき, 方程式 (3.7) と初期条件 (3.8) を満たす解は

$$|x - x_0| \leq \alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

で一意に存在する.

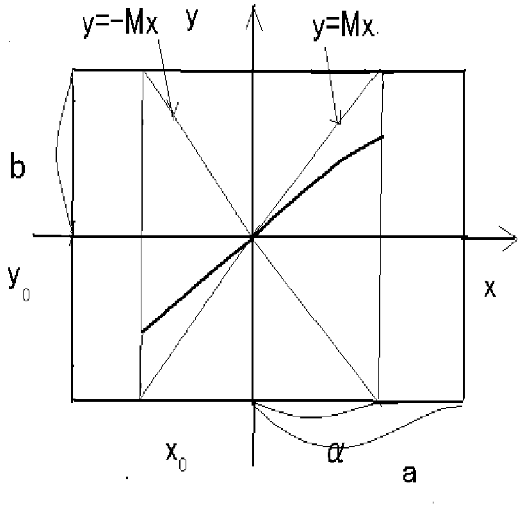

図 2: 解の存在範囲

(証明)　Picard の逐次近似法に従う.
[第 1 段]　連続関数 $y(x)$ で

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \tag{3.11}$$

をみたすものがあればこれは (3.7) の解である.

$$\begin{cases} y_0(x) &=& y_0 \\ \\ y_{k+1}(x) &=& y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s, y_k(s))\,ds \quad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots) \end{cases} \tag{3.12}$$

として $\{y_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ を定める. $y_k(x)$ が連続関数であることは (3.12) と関数 $f(x, y)$ の仮定からわかる.

$$|y_k(x) - y_0| \leq b \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

を示そう.

$$\begin{aligned} y_k(x) - y_0 &= \int_{x_0}^{x} f(t, y_{k-1}(t))\,dt \\ |y_k(x) - y_0| &\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_{k-1}(t))|\,dt \\ &\leq M|x - x_0| \leq M\alpha \leq b \end{aligned}$$

ここで $\alpha = \min\Big(a, \dfrac{b}{M}\Big)$ を用いた.

$$\begin{aligned} y_k(x) - y_{k-1}(x) &= \int_{x_0}^{x} f(t, y_{k-1}(t))\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y_{k-2}(t))\,dt \\ &= \int_{x_0}^{x} \{f(t, y_{k-1}(t)) - f(t, y_{k-2}(t))\}\,dt \end{aligned}$$

ここで (3.10) を用いると

$$|y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq K\int_{x_0}^{x} |y_{k-1}(t)) - y_{k-2}(t)|\,dt$$

$k = 1$ とおいて

$$|y_1(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)(t)|\,dt \leq M|x - x_0|$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq K\int_{x_0}^{x} |y_1(t)) - y_0|\,dt = KM\frac{|x - x_0|^2}{2}$$

以下同様に続けて

$$|y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq MK^{k-1}\frac{|x - x_0|^k}{k!} \tag{3.13}$$

[第２段]　$\{y_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ が $|x - x_0| \leq \alpha$ で一様収束することを示す. $m > n$ として

$$\begin{aligned} y_m(x) - y_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{m} (y_k(x) - y_{k-1}(x)) \\ |y_m(x) - y_n(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{m} |y_k(x) - y_{k-1}(x)| \qquad (3.14) \\ &\leq M\sum_{k=n+1}^{m} K^{k-1}\frac{\alpha^k}{k!} \end{aligned}$$

他方

$$\sum_{k=1}^{\infty} K^{k-1}\frac{\alpha^k}{k!} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{\infty} K^k\frac{\alpha^k}{k!} = \frac{1}{K}\Big(e^{K\alpha} - 1\Big)$$

だから (3.14) の右辺は m, n を十分大にすればいくらでも小さくできる. それゆえ, $\{y_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ は一様収束する連続関数である. ゆえに $\lim_{k\to\infty} y_k(x)$ は連続関数の一様収束極限として連続である. それゆえ (3.13) において極限を取ると積分記号下の極限移行により

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$$

となり (3.12) を得る.

[第３段]　解の一意性を示そう．(3.7),(3.8) の２つの解を $y(x), z(x)$ とする．(3.11) から

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, z(t))\, dt$$

差を取って

$$y(x) - z(x) = \int_{x_0}^{x} \{f(t, y(t)) - f(t, z(t))\}\, dt$$

$w(x) = |y(x) - z(x)|$ とおくと

$$\begin{aligned} w(x) &\le \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, z(t))|\, dt \\ &\le K \int_{x_0}^{x} |y(t) - z(t)|\, dt \end{aligned}$$

それゆえ

$$w(x) \le K \int_{x_0}^{x} w(t)\, dt$$

補題 3.1(Gronwall の不等式) で $q(t) \equiv 0,\ p(t) \equiv K$ だから

$$w(x) \le 0 \times e^{K \int_{x_0}^{x} dt} = 0 \times e^{K|x - x_0|}$$

よって

$$w(x) \equiv 0$$

$$i.e. \quad y(x) \equiv z(x), \qquad \forall |x - x_0| \le \alpha$$

■

2002/10/25 版