

# 数理科学モデル論演習第 2 回

## 0. 目次

1. Lotka–Volterra の方程式 .....	p.47
2. 競合的 2 種 .....	p.48
3. van der Pol の方程式 .....	p.48
4. Duffing 方程式 .....	p.49
5. Minea 方程式 .....	p.49
6. Lorentz 方程式 .....	p.50

## §1. Lotka–Volterra の方程式

1. Lotka–Volterra の方程式は次の形をしている :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t) - x(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -2y(t) + x(t)y(t) \end{cases}$$

この方程式系の初期値問題の解を求める. 方程式は魚は自然増加するが, サメ (鮫) がいることにより減少する. サメは餌 (魚) がないと減少するが, 魚の存在で増加する.

2. 数値解を求めそのグラフを描くには次の操作をする :

```
tmp=NDSolve[{x'[t]==x[t]-x[t]y[t],y'[t]==-2y[t]+x[t]y[t],
```

```
x[0]==4,y[0]==2.5},{x,y},{t,0,30}]  
```

計算結果を補間公式を用いて関数の形で表示する. これを図示するには

```
g1=ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.tmp],{t,0,30},
```

```
PlotStyle->RGBColor[1,0,0],AspectRatio->Automatic,
```

```
PlotRange->{{-1,6},{-1,6}}]  
```

3. 上の計算による  $tx$  平面でのグラフを描く.

```
g2=ParametricPlot[Evaluate[{t,x[t]}/.tmp],{t,0,30},
```

```
PlotStyle->RGBColor[0,1,0],PlotRange->{-1,6}]
```

グラフの線は緑色で表示される.

4. 上の計算による  $ty$  平面でのグラフを描く.

```
g3=ParametricPlot[Evaluate[{t,y[t]}/.tmp],{t,0,30},
PlotStyle->RGBColor[0,0,1],PlotRange->{-1,6}]
```

グラフの線は青色で表示される.

5. 二つのグラフを合わせると

```
Show[g2,g3]
```

グラフをよく見ると, サメと魚の増減が周期的に起こっている. また注意してよく見ると, 魚が増加し始めて少し時間がずれてサメの増加が起こっていることが分かる.

## §2. 競合的 2 種

1. 2 種類の同じ餌を捕食する生体の共存について調べる. 方程式はロジステックの方程式を 2 個並べた形となる.

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 4x(t) - 2x(t)^2 - x(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = 4y(t) - x(t)y(t) - 2y(t)^2 \end{cases}$$

この方程式は停留点を 4 個持つ.  $(0,0), (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}), (4,0), (0,4)$  である.

2. 数値解を求めそのグラフを描くには次の操作をする:

```
tmp=NDSolve[{x'[t]==4x[t]-x[t]^2-x[t]*y[t],
y'[t]==4y[t]-x[t]y[t]-4y[t]^2,x[0]==3,y[0]==2.5},
{x,y},{t,0,30}]  
```

上で初期値を変えて解の様子を描く.  $(0,0), (\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$  は不安定な停留点,  $(4,0), (0,4)$  は安定な停留点であることがグラフより読みとれる. それゆえ, 2 種の共存はかなり厳しい条件でしか起こりえないことが分かる. この方程式系の有名な例は, 酵母がアルコールを作りそのとき出来るアルコールは酵母の総数  $x+y$  に比例する. しかし酵母の成長率はアルコールの容量が増えるにつれて減少する.

## §3. van der Pol の方程式

1. van der Pol の方程式は

$$x''(t) + \epsilon(1 - x^2)x'(t) + x(t) = 0$$

である. これを質点の運動方程式と考えると,  $\epsilon(1 - x^2)x'$  はこの運動の抵抗を表しており,  $|x|$  が小さいところではこの抵抗が速度と反対符号であり, 抵抗と速度は負で実

際は運動を増進させる方向に働く。  $|x|$  が大きいときは抵抗が正で、実際に運動を押さえる方向に働く。 次の連立方程式はスケール変換で上の方程式と同値である

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = y(t) - x^3(t) + x(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -x(t) \end{cases}$$

2. この方程式を一般化した方程式は Liénard 方程式とよばれ、周期解を持つことが工学の問題で扱われる。 Liénard 方程式は次の形である。

$$x''(t) + f(x)x'(t) + g(x) = 0$$

$f, g$  が次の条件をみたす：

- 1)  $f(x), g(x)$  は  $|x| < \infty$  で解析的である；
- 2)  $f(x) = f(-x)$  で  $f(0) < 0$ ,  $g(x) = -g(-x)$  で  $xg(x) > 0$ ；
- 3)  $x \rightarrow \infty$  のとき  $F(x) = \int_0^x f(x)dx \rightarrow \infty$ ；
- 4)  $F(x)$  は  $0 < x < a$  では負,  $x = a$  では 0,  $x \geq a$  では単調増加である。

上の 2 階の方程式は

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = y(t) - F(x) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -g(x) \end{cases}$$

と連立方程式に書き直される。

## §4. Duffing 方程式

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -0.3y(t) + x(t) - x(t)^3 + 11 \cos t \end{cases}$$

§3 の Liénard 方程式の変形である。 この方程式はストレンジ・アトラクターが現れる例として有名である。 非斉次項のない場合,  $\delta = 0$ ,  $\delta < 1$ ,  $\delta > 1$  の場合に解の様子を調べよ。 また非斉次項のある場合との解の様子を比較せよ。

## §5. Minea 方程式

この方程式は流体力学の方程式, すなわち非圧縮性流体の方程式である Navier-Stokes 方程式と似ている。 非線形項が 2 次であることと, 非線形項が直交していることが似て

いる.

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -x(t) - \delta(y(t)^2 + z(t)^2) + 1 \\ \frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + \delta x(t)y(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = -z(t) + \delta x(t)z(t) \end{cases}$$

$y = r \cos \theta, z = r \sin \theta$  とおくと, 2 式, 3 式から

$$\theta'(t) = 0, \quad \text{i.e.} \quad \theta(t) = \theta(0)$$

と

$$r'(t) + r - \delta x(t)r^2 = 0$$

を得る. これから停留点  $(1, 0, 0)$  と円周

$$x = \frac{1}{\delta}, \quad y^2 + z^2 = \frac{\delta - 1}{\delta^2}$$

を得る.  $r(t)$  を  $y(t)$  とおいて方程式をとく :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -x(t) - \delta y(t)^2 + 1 \\ \frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + \delta x(t)y(t) \end{cases}$$

$\delta$  の値により解のトラジェクトリーが異なる.  $\delta < 1$  のときは  $(1, 0)$  に近づく.  $1 < \delta < 9/8$  のときは,  $\delta > 9/8$  のときは渦状点となる.

## §6. Lorentz 方程式

1. 地球物理学者の Lorentz が大気現象 (熱対流) のモデルとして提唱した方程式系は次のようである.

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -10(x(t) - y(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -x(t)z(t) + 28x(t) - y(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = x(t)y(t) - \frac{8}{3}z(t) \end{cases}$$

$x(t), y(t), z(t)$  は時間とともに変わる大気の変動を表す変数である.  $x(t)$  は対流の強さに比例する量,  $y(t)$  は対流で上下する 2 つの流れの温度差に比例する量,  $z(t)$  は上下方向の温度差の分布が, どの程度空間的に線形関数から離れているかを示す量を表す. この方程式系は停留点を 2 個持ち,  $(\pm 6\sqrt{2}, \pm 6\sqrt{2}, 27)$  (複号同順) である.

2. 上の方程式の数値解析は

```
tmp=NDSolve[{x'[t]==-10(x[t]-y[t]),y'[t]==-x[t]z[t]+28x[t]-y[t],  
z'[t]==x[t]*y[t]-8z[t]/3, x[0]==0,y[0]==1,z[0]==0},{x,y,z},  
{t,0,30},MaxSteps->3000] shift ←
```

解の表示は

```
g1=ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]}/.tmp],{t,0,30},  
AspectRatio->Automatic, PlotPoints->2000,PlotRange->  
{{-30,30},{-30,30},{-10,50}}] shift ←
```

3. 解グラフの様子は、2つの平衡点の一方をぐるぐる回りながら、突然他方の平衡点に移りそこでぐるぐる回り始める。そしてまた、突然もう一方の平衡点に移りぐるぐる回り始めるということを繰り返す。この平衡点の移り変わりが不規則で予想不可能である。この方程式の解の図は Lorentz アトラクターと呼ばれている。
4. 上の `ParametricPlot3D` を用いたのでは解の曲線に色づけが出来ない。色づけをするためには `Graphics3D` のファイルの `ScatterPlot3D` を用いる。簡単にいえば、問題のポイントは数値解析した解のリストの結果のファイルを修正して括弧を1つはずしたリストを作成することである。実際は次のように行う。結果は図6となる。

```

tmp=NDSolve[{x'[t]==-10(x[t]-y[t]),y'[t]==-x[t]z[t]+28x[t]-y[t],
z'[t]==x[t]*y[t]-8z[t]/3,x[0]==0,y[0]==1,z[0]==0},{x,y,z},
{t,0,30},MaxStep->3000] shift ↵
Table[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]}/.tmp],{t,0,30,0.01}]>>tmp2 shift ↵
lst:=<<tmp2 shift ↵
ChgLs[x_]:=({l=Length[x];y=Nil;
If[l==0,Return[y]];
y=List[Flatten[Take[x,1]]];
If[l==1,Return[y]];
Do[y=Append[y,Flatten[Part[x,j],1]],{j,2,l}];
Return[y];) shift ↵
ChgLs[lst]>>tmp3 shift ↵
lst3:=<<tmp3 shift ↵
<<Graphics'Graphics3D' shift ↵
ScatterPlot3D[lst3,PlotJoined->True,PlotStyle->RGBColor[1,0,0],
PlotRange->{{-30,30},{-30,30},{0,60}}] shift ↵

```

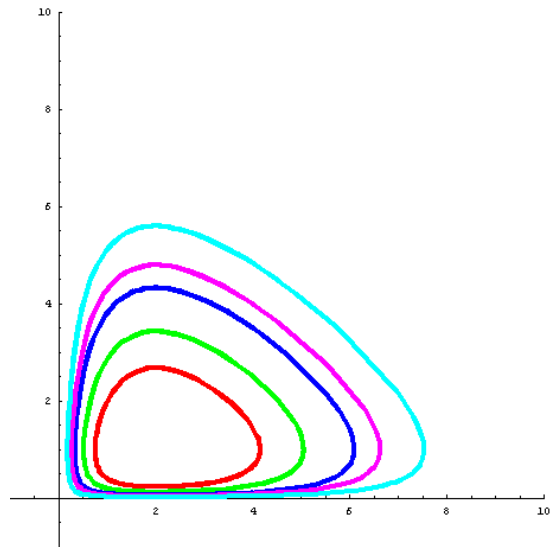


図 1: Lotka–Volterra の方程式

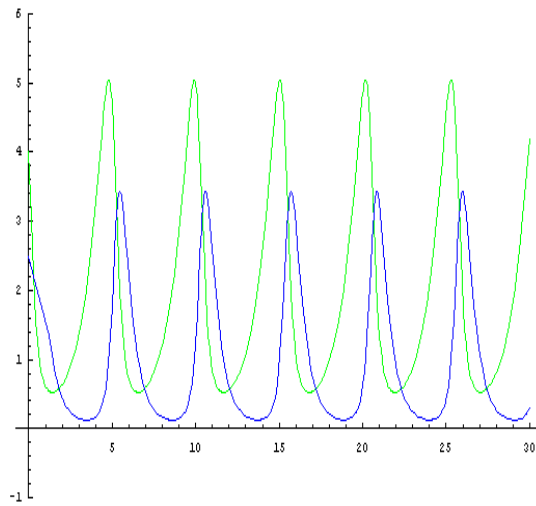


図 2: Lotka–Volterra の方程式 : 時系列領域

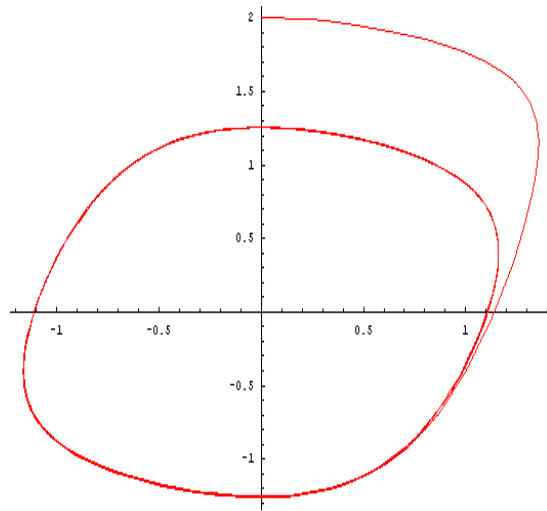


図 3: van der Pol の方程式

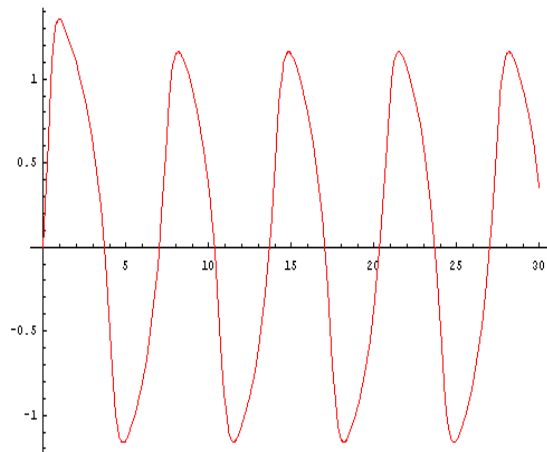


図 4: van der Pol の方程式 : 時系列



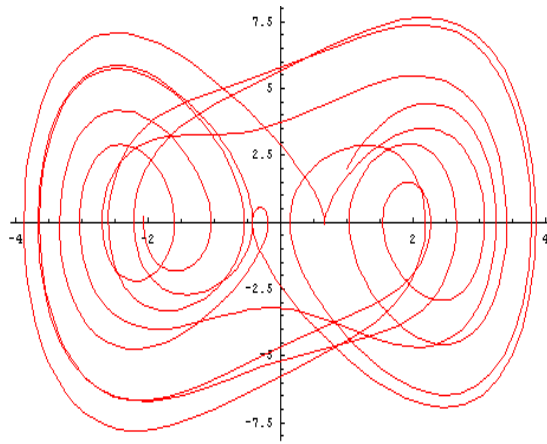


图 5: Duffing 方程式

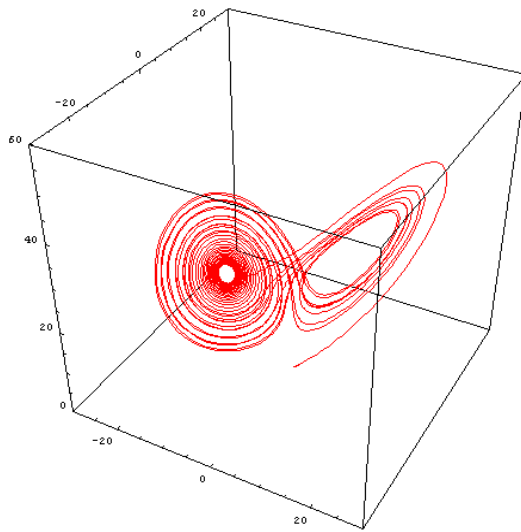


图 6: Lorenz 方程式

2006/9/15 版