数理科学モデル論

自然現象をモデル化して微分方程式を導き，その微分方程式の性質を理論的に考察し，数値解析してその結果を表示し、理論が正しいかどうかを判定することが出来る．

1 章では 1 階常微分方程式の解法を述べる．1 階線形方程式の解法は 3 章の解の一意性の定理の証明に出てくる Gronwall の不等式で重要な役割を果たす．さらにそれは7 章で調べる不変集合，アトラクターの存在の証明には欠かせない．

2 章では 2 階線形常微分方程式の理論を述べる．方法のキー･ポイントは線型性の理論と 1 章の 1 階線形方程式の解法で用いた Lagrange の定数変化法である．線型性については例えば佐竹一郎，「 線型代数学 」，裳華房等を参照されたい．

3 章では解の存在と 1 意性の定理を述べる．1 意性の証明に用いる Gronwall の不等式は 7 章で調べる不変集合，アトラクターの存在には欠かせないテクニックである．解の存在の証明方法は数列の収束性の議論と密接な関係を持つ．

4 章，5 章で数学のソフト Mathematica を用いて常微分方程式の解を求め，その数値解の表示を行う．プレゼンテーションの方法も基本的なものは学ぶ．数学のレポート, 論文等には TEX という論文作成ソフトを用いると数式がきれいに印刷される．最近では図形の印刷も可能になってきた．またプレゼンテーションではデータの取り込みが重要であるが Mathematica の図はたとえば PowerPoint へも取り込める．

6 章では線型偏微分方程式の基本的なことに簡単に触れる．2 階線型偏微分方程式の分類と楕円型双曲型方程式に対する最大値の原理、放物型方程式に対する変数分離法による解の構成をする．

7 章では非線形方程式が不変集合，アトラクターを持つかどうかを比較的簡単な場合に調べる．神経伝播の方程式，粘性菌の方程式等パターン形成の方程式に簡単に触れる．

第 1 章 1 階常微分方程式

§1.0. 第 1 章の目次

§1.1. 微分方程式の分類

x を個体数とする．たとえばシャーレの中の細菌の数とか江戸時代の人口とかである．このとき微分方程式は次のようになる：

$$x'(t) = ax(t) \qquad \text{の解は } x = x_0 e^{a(t-t_0)} \tag{1.1}$$

ここに x_0 は初期値である．ここに a は個体数の増加率である．簡単のため定数であるとする．Marthus の人口論がある．食料は算術級数的にしか増えないが，人口は幾何級数的に増加する．これに対し個体数がどんどん増えると他の個体の存在が抑制の方向に働く．それゆえ微分方程式は次のようになる：

$$x'(t) = ax(t) - bx(t)^2 \tag{1.2}$$

これらの解の図は次のようになる：

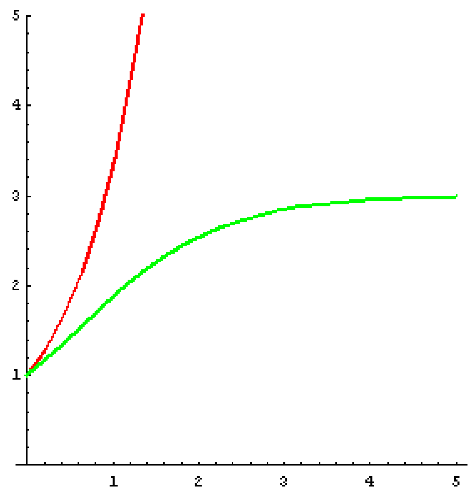

図 1: 解のグラフ

赤色の解は方程式 (1.1) の解で指数的に増大している．緑色の解は方程式 (1.2) の解であるところから増大がだんだん少なくなり次第に $\dfrac{a}{b}$ に近づく．緑色の解曲線は logistic 曲線と呼ばれ化学反応の生成物, 江戸時代の人口の推移を表していると言われている．

これを一般化した方程式は

$$x'(t) = F(t, x(t)) \tag{1.3}$$

である．これは 1 階非線形常微分方程式である．上の (1.2) の場合は $F(t, x(t)) = ax(t) - bx(t)^2$ である．

今度は魚とサメの方程式，ノウサギとオオヤマネコのように餌とそれを食料とする個体などの餌と捕食者のモデルを考える．餌は自然の状態では増え続けるが捕食者の存在が減少に向かわせる．一方捕食者は何もない状態では減少し続けるが餌の存在で増加に転じる．すなわち方程式は次のようになる：

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} &=& ax - bxy \\ \\ \dfrac{dy}{dt} &=& -cy + dxy \end{array} \right. \tag{1.4}$$

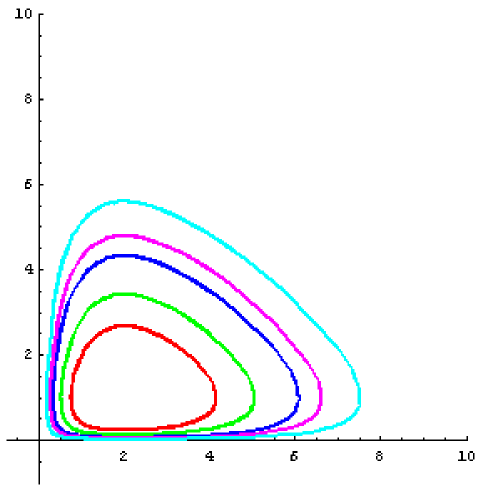

図 2: 解のグラフ

この解は停留点 $\left(\dfrac{c}{d}, \dfrac{a}{b}\right)$ を中心として周りを回る曲線となる．この現象は餌が少なくなると捕食者も減少する．それで餌が増加し出すとそれに対応して捕食者も増加する．そして捕食者が多くなると餌は減少する．これを繰り返すので解は周期解となる．

この方程式は生物学者 D'Anconna が数学者 Volterra のところに相談に行った．問題は地中海の漁獲が，ある時はサメばかり，またべつの時は普通の魚ばかりでサメが少ないことがよくあるがどうしてかということである．それに対する Volterra の解答が上の微分方程式だったそうである．それからこの方程式は Lotka–Volterra の方程式と呼ばれている．

これを一般化した方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= F(t, x(t), y(t)) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} &= G(t, x(t), y(t)) \end{cases} \tag{1.5}$$

これを方程式系，または連立常微分方程式という．上の例では
$F(t, x(t), y(t)) = ax(t) - bx(t)y(t), G(t, x(t), y(t)) = -cy(t) + dx(t)y(t)$ である．

関数 $y(x)$ とその高階導関数 $y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)$ を含む式

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0 \tag{1.6}$$

を n 階常微分方程式という．これが最高階 $y^{(n)}$ について解けているとき

$$y^{(n)} = F(x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n-1)}(x)) \tag{1.7}$$

正規型という．(1.6) は陰関数定理により (1.7) と表されることが可能な場合がある．

F が従属変数 $y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)$ について 1 次式のとき

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = q(x) \tag{1.8}$$

常微分方程式を**線型**であるという．ここで $q(x) = 0$ のとき**斉次 (同次)** という．
$p_1(x), p_2(x) \cdots, p_n(x)$ が定数の時**定数係数**という．

一般的に言えば常微分方程式が解けるのは線型定数係数の時のみである．

$$\begin{array}{lcll} y'' + y &=& \cos\, x & \text{線型，定数係数，非斉次} \\ \\ y'' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y &=& xe^{-x} & \text{線型，変数係数，非斉次} \\ y'' &=& y^2 & \text{非線形 2 階} \end{array}$$

従属変数が 2 以上の時

$$\begin{cases} y_1' &= F_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ y_2' &= F_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \cdots & \cdots \quad \cdots \\ y_n' &= F_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{cases}$$

のとき n 個の連立常微分方程式，または n 個の常微分方程式系という．すべての $1 \leq i \leq n$ について $F_j(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ が $y_1, \cdots, y_n$ について 1 次式のとき線型であるという．

$$\begin{cases} y^{(n)} = F(x, y_1, y', \cdots, y_{n-1}) \\ y_1(x_0) = y_1^0, \cdots, y_{n-1}(x_0) = y_{n-1}^0 \end{cases}$$

を**初期値問題**という．例えば

$$\begin{cases} y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x) \\ y(x_0) = a, y'(x_0) = b \end{cases}$$

は初期値問題である．

それにたいし境界での値を与えて方程式を解く問題例えば

$$\begin{cases} y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x) \\ y(a) = a, y(b) = 0 \end{cases}$$

を**境界値問題**という．

$$\begin{cases} y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = \lambda y \\ y(a) = y_1, y(b) = y_2 \end{cases}$$

のように定数 λ と $y(x)$ 求める問題を**固有値問題**という．固有値問題は物理学，工学の分野でおおくの応用をもつ．

§1.2. 1 階常微分方程式の解法

1.2.1. 変数分離型

変数分離型は次の形をしている

$$y'(x) = f(x)g(y) \tag{2.1}$$

$g(y) \neq 0$ として $g(y)$ でわって

$$\frac{y'(x)}{g(y)} = f(x)$$

積分して

$$\int \frac{y'(x)}{g(y)} dx = \int f(x)dx + C \tag{2.2}$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

$g(\beta) = 0$ の場合は $y \equiv \beta$ が解である．

例 2.1. $y' = \dfrac{y^2 - 1}{2x}$

$$2\int \frac{y'}{y^2 - 1} dx = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \int \frac{dx}{x}$$

$$\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \log|x| + C'$$

$$\frac{y-1}{y+1} = e^{C'}|x| = Cx$$

$C = \pm e^{C'}$ は 0 とならないがこれを 0 とおいたものも解である．ゆえに

$$y = \frac{1+Cx}{1-Cx} \qquad \text{ここに } C \text{ は任意の定数}$$

$C \to \infty$ として $y = -1$ も解である．

1.2.2. 同次形

2 変数の関数 $f(x,y)$ が $t > 0$ にたいして

$$f(tx, ty) = t^m f(x,y) \tag{2.3}$$

のとき m 次斉次という．0 次斉次を**同次**という．

$f(x,y)$ が同次の時微分方程式

$$y' = f(x,y) \tag{2.4}$$

を解く．

$$\frac{y}{x} = u \qquad i.e. \qquad y = ux$$

とおく．

$$y' = u'x + u$$

だから微分方程式は f の同次性を考慮して

$$u'x + u = f(x, xu) = f(1, u)$$

$$u' = \frac{f(1,u) - u}{x} \tag{2.5}$$

これは変数分離型をしている．ゆえに求積法で解が求まる．

例 2.2. 常微分方程式 $y' = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2}$ を解く．

$f(1,u) = u^2 + 2u$ だから

$$u' = \frac{u^2 + 2u - u}{x} = \frac{u^2 + u}{x}$$

積分して

$$\int \frac{du}{u^2 + u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$Cx = \frac{u}{u+1}$$

$$y = \frac{Cx^2}{1-Cx} \qquad C \to \infty \text{ の極限 } y = -x \text{ も解}$$

1.2.3. 1 階線型

常微分方程式

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{2.5}$$

にたいし

$$z' + p(x)z = 0 \tag{2.6}$$

を斉次 (同次) 方程式という． (2.5) は変数分離型だから求積法で解け，解は

$$y = Ce^{-\int p(t)dt}$$

となる．この定数 C を関数 $u(x)$ に変えて (2.5) の解を求める．この方法を Lagrange の定数変化法という.

$$y = u(x)e^{-\int p(t)dt} \tag{2.7}$$

(2.7) を (2.5) に代入すると

$$u'e^{-\int p(t)dt} - pue^{-\int p(t)dt} + pue^{-\int p(t)dt} = q(x)$$

$$u' = qe^{\int p(t)dt}$$

積分して

$$u(x) = \int q(s)e^{\int^s p(t)dt}ds + C$$

(2.7) に代入して

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(\int q(s)e^{\int^s p(t)dt}ds + C\right)e^{-\int p(t)dt} \\ &= e^{-\int p(t)dt}\int q(s)e^{\int^s p(t)dt}ds + Ce^{-\int p(t)dt} \end{aligned} \tag{2.8}$$

となる．第 2 項は (2.6) の解である．故に標語的にいえば，(2.5) の解は (2.5) の特殊解と (2.6) の一般解との和で表される.

例 2.3. 常微分方程式 $y' + (\tan x)y = \sec x$ を解く.

公式 (2.8) から

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-\int \tan x\, dx}\left(\int \sec x e^{\int \tan x\, dx} dx + C\right) \\
&= e^{\log(\cos x)}\left(\int \sec x \frac{1}{\cos x} dx + C\right) \\
&= \cos x\left(\int \sec^2 x + C\right) \\
&= \cos x(\tan x + C) \\
&= \sin x + C\cos x
\end{aligned}
$$

1.2.4. 完全型

全微分方程式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{2.9}$$

の解が $F(x,y) = C$ なる形をしている場合を考える．

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

これが (2.9) と一致するためは

$$P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

F が C^2–級のとき

$$P_y = F_{xy} = F_{yx} = Q_x \tag{2.10}$$

すなわち (2.9) が $F(x,y) = C$ なる解を持つためには (2.10) が成立する必要がある．

一方 Green の定理から，関数が端点 A, B の値によってのみ決まり、その経由路にはよらないためには, 領域が単連結でかつ (2.10) が成立することが必要であることが知られている．このとき F の値は線積分によって求まり，しかも異なる積分路によらないで値が決まる．(2.9) が (2.10) をみたすとき**完全系**であるという．

例 2.4. 全微分方程式 $(2x+y)dx + (x+2y)dy = 0$ を解く．

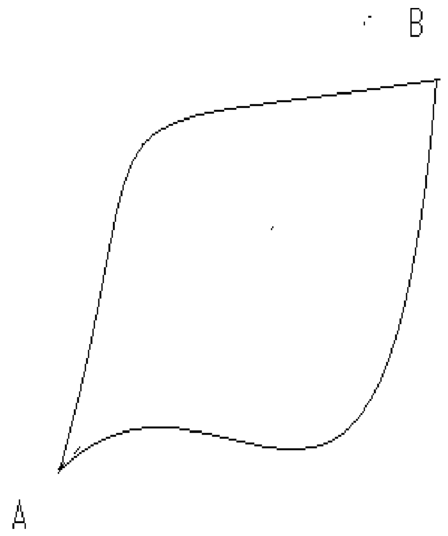

図 3: 積分路

$$
\begin{array}{llll}
P = 2x + y & Q = x + 2y & & \\
P_y = 1 & = Q_x & & \text{より完全系} \\
 & & & \\
F = \displaystyle\int P dx & = \displaystyle\int (2x + y) dx & = x^2 + xy + C(y) & \\
 & & & \\
F_y & = x + C'(y) & = Q & \\
\text{より} & C'(y) = 2y & & \\
 & C(y) = y^2 + C' & & \\
\text{よって} & x^2 + xy + y^2 & = C &
\end{array}
$$

積分因子. 全微分方程式 (2.9) が完全型でない時, (2.9) にある関数を掛けたら完全型になるときこの関数を積分因子という．積分因子は (2.9),(2.10) からつぎの 1 階偏微分方程式の解となる：

$$\lambda P dx + \lambda Q dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda P) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda Q)$$

$$\lambda \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial \lambda}{\partial x}$$

$$P\frac{\partial\lambda}{\partial y}-Q\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\lambda\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) \tag{2.11}$$

これは完全型でないことから右辺の λ の係数が 0 でない．しかしこの方程式は一般には解けるとは限らない．次の例を見よう．

例 2.5.　方程式 $(x^2e^x-y)dx+xdy=0$ を解く．

$P=x^2e^x-y,\ \ Q=x$ だから

$P_y=-1,\qquad Q_x=1$ より完全型ではない．

$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)/Q=\phi(x)$ となるとき $e^{-\int\phi(x)dx}$ が積分因子となることを用いる．

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)/Q=\frac{2}{x}$$

$$e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{-\log x^2}$$

$\frac{1}{x^2}$ をかけて

$$\frac{1}{x^2}\left\{(x^2e^x-y)dx+xdy\right\}=0$$

$$e^xdx+\left\{\frac{xdy-ydx}{x^2}\right\}=0$$

$$de^x+d\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

$$e^x+\frac{y}{x}=C$$

積分因子を求める方法は上の例のほかに次のものもある．x^my^n を掛けて完全型になることもある．

§1.3. 参考書

白岩　謙一,「常微分方程式序説」, サイエンス社
吉田 耕作,「微分方程式の解法」, 岩波全書
佐竹一郎,「線型代数学」, 裳華房
Coddington,「Introduction to ordinary differential equations」, 丸善
ポントリャーギン,「常微分方程式」, 共立出版
コデントン–レビンソン,「常微分方程式論 (上)(下)」, 吉岡書店
ハーシュ–スメール,「力学系入門」, 岩波書店
山口　昌哉,「非線形現象の数学」, 朝倉書店

溝畑　茂,「偏微分方程式論」, 岩波書店
Kosaku Yosida,「Functional Analysis」, Springer–Verlag.
Temam,「Infinite–Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics」, Springer–Verlag.

2007/10/11 版