第 2 章 2 階線型常微分方程式

§1.0. 第 2 章の目次

§2.1. 斉次方程式の解

関数 $y(x)$ とその導関数 $y'(x), \cdots, y^{(n)}$ を 1 次式である常微分方程式

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n(x)y(x) = q(x) \tag{2.1}$$

を n **階線型常微分方程式**という．ここで $q(x) \equiv 0$

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n(x)y(x) = 0 \tag{2.2}$$

のとき，この方程式は**斉次**であるという．

定義 2.1.　ある区間 I で定義された m 個の関数 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_m(x)$ にたいしそれらの定数倍の和

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \cdots + C_m\varphi_m(x) = 0$$

ならば $C_1 = C_2 = \cdots = C_m = 0$ のとき $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_m(x)$ は区間 I で **1 次独立**であるという．1 次独立でないとき **1 次従属**であるという．

方程式 (2.2) に対する解の存在と一意性の定理を述べるがその証明は次章で述べる．

命題 2.1.　斉次方程式 (2.2) の係数 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_n(x)$ が $x_0 \in I$ を含む区間 $I : |x - x_0| < a$ で連続とする．このとき $x_1 \in I$ を固定したとき n 個の定数 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ にたいし初期条件

$$y(x_1) = a_0, y'(x_1) = a_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_1) = a_{n-1}$$

を満たし，I 内で連続な解 $y(x)$ が存在しかつ一意に決まる．

系　$y(x_1) = 0, y'(x_1) = 0, \cdots, y^{(n-1)}(x_1) = 0$ なる (2.2) の解は $y(x) \equiv 0$ である．

命題 2.2.　$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_m(x)$ が (2.2) の解ならば，その 1 次結合

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \cdots + C_m\varphi_m(x) \tag{2.3}$$

もまた (2.2) の解である．これを**重ね合わせの原理**または**重畳の原理**という．

これは線型代数では基本的な原理であり, 線型の微分方程式でもつねに用いる．この 2 章また 6 章を参照せよ．

定義 2.2.　区間 I で定義された m 個の関数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_m(x)$ が与えられたとき，その Wronskian $W(y_1, y_2, \cdots, y_m)(x)$ を

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_m(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_m'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(m-1)}(x) & y_2^{(m-1)}(x) & \cdots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$$

で定める．

このとき

命題 2.3.　2 階線型常微分方程式

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0 \tag{2.2$'$}$$

の 2 つの解 $y_1(x), y_2(x)$ が一次独立であるための必要十分条件は

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.4}$$

(証明)　$\Rightarrow$:　$\exists x_1 \in I \quad W(y_1, y_2)(x_1) \neq 0$ を示す．もしそうでないと仮定すると $\exists W(y_1, y_2)(x_1) = 0$. そのとき

$$\begin{array}{rcl} C_1y_1(x_1) + C_2y_2(x_1) & = & 0 \\ C_1y_1'(x_1) + C_2y_2'(x_1) & = & 0 \end{array}$$

が自明でない解 C_1, C_2 を持つ．(2.2$'$) の解を $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ とすると

$$y(x_1) = 0, \quad y'(x_1) = 0$$

これから解の存在と一意性の定理 (命題 2.1) より

$$y(x) \equiv 0$$

ゆえに $y_1(x), y_2(x)$ が一次独立という仮定に反する．
　$W(y_1, y_2)(x_1) \neq 0$ だから

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dx}W(y_1, y_2)(x) & = & \dfrac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ \\ & = & \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} \end{array}$$

y_1, y_2 が $(2.2')$ を満たしていることから

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -p_1 y_1' - p_2 y_1 & -p_1 y_2' - p_2 y_2 \end{vmatrix} = -p_1 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = -p_1 W$$

$$\frac{d}{dx} W = -p_1 W$$

これから $W = Ce^{-\int_{x_1}^{x} p_1(s)ds}$

ゆえに $W(x_1) \neq 0$ なら $W(x) \neq 0$

$W(x_1) = 0$ なら $W(x) = 0$

となり命題の $\Rightarrow$ の部分の証明が終わる．

$\Leftarrow$: $W(y_1, y_2) \neq 0$ でありかつ y_1, y_2 は一次従属とする．$\exists\, C_1, C_2$ 零ではなく

$$\begin{aligned} C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) &= 0 \\ C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) &= 0 \end{aligned}$$

が成立する．この方程式が自明でない解 C_1, C_2 を持つためには $W(y_1, y_2) = 0$ となりこれは仮定に反する．

■

命題 2.4. 2 階線型常微分方程式 $(2.2')$ は 2 つの一次独立な解をもち，3 つ以上の一次独立な解は持たない．

(証明) 方程式 $(2.2')$ の異なる初期値の解を

$$\begin{cases} y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 \\ y(x_0) = 1 \quad y'(x_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 \\ y(x_0) = 0 \quad y'(x_0) = 1 \end{cases}$$

$y_1(x), y_2(x)$ とする．これは一次独立である．

$$\left.\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}\right|_{x=x_0} = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

y_1, y_2 と一次独立な解があったとすればそれを z とすれば方程式 $(2.2')$ を満たすことから

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & z \\ y_1' & y_2' & z' \\ y_1'' & y_2'' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & z \\ y_1' & y_2' & z' \\ -p_1 y_1' - p_2 y_1 & -p_1 y_2' - p_2 y_2 & -p_1 z' - p_2 z \end{vmatrix}$$

$$= -p_1 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & z \\ y_1' & y_2' & z' \\ y_1' & y_2' & z' \end{vmatrix} - p_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & z \\ y_1' & y_2' & z' \\ y_1 & y_2 & z \end{vmatrix} = 0$$

よって y_1, y_2, z は命題 2.3 から一次独立ではない.

■

この命題から 2 階線型常微分方程式の斉次解は 2 次元のベクトル空間になることが分かった.

今度は (2.2′) の解の 1 つが分かっているとき，もう 1 つの一次独立な解を求める方法をのべる．方法は 1 章の 1 階線形方程式の解法である Lagrange の定数変化法である.

命題 2.5. (2.2′) の解 $\varphi_1(x)$ が分かっているとき一次独立なもう 1 つの解は

$$\left(\int \varphi_1^2 e^{C_1 \int p_1\, ds} dx + C_2\right)\varphi_1$$

であたえられる．この方法は **D'Alembert** の**階数低下法**とよばれている.

(証明) $C\varphi_1(x)$ が解だから Lagrange の定数変化法により

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= u(x)\varphi_1(x) \\
\varphi_2' &= u'\varphi_1 + u\varphi_1' \\
\varphi_2'' &= u''\varphi_1 + 2u'\varphi_1' + u\varphi_1''
\end{aligned}$$

これを方程式 (2.2′) に代入して

$$\begin{aligned}
&\varphi_2'' + p_1(x)\varphi_2'(x) + p_2(x)\varphi_2 \\
&= u''\varphi_1 + 2u'\varphi_1' + u\varphi_1'' + p_1(u'\varphi_1 + u\varphi_1') + p_2 u\varphi_1
\end{aligned}$$

u について整理して

$$\begin{aligned}
&= u''\varphi_1 + u'(2\varphi_1' + p_1\varphi_1) + u(\varphi_1'' + p_1\varphi_1' + p_2\varphi_1) \\
&= u''\varphi_1 + u'(2\varphi_1' + p_1\varphi_1)
\end{aligned}$$

これが解となるためには $u' = v$ とおいて

$$v'\varphi_1 + v(2\varphi_1' + p_1\varphi_1) = 0$$

これは 1 階線型だから変数分離法により解が求まる．それをもう一度積分して解が求まる.

この解 φ_2 が φ_1 と一次独立であることを調べる.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \varphi_1 & u\varphi_1 \\ \varphi_1' & u'\varphi_1 + u\varphi_1' \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \varphi_1 & u\varphi_1 \\ \varphi_1' & u\varphi_1' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_1' & u'\varphi_1 \end{vmatrix} \\
&= u\varphi_1^2
\end{aligned}$$

$u \neq C$ より $u' \neq 0$

■

§2.2. 非斉次方程式の解の構成

常微分方程式

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \tag{2.1$'$}$$

で I は x_0 含むある区間であり，$p_1(x), p_2(x), f(x)$ は区間 I で連続関数であり, 初期値 $y_(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$ をみたす解はただ 1 つ存在する．(2.1$'$) の左辺を Ly と書くとき $Ly = 0$ を (2.1$'$) の**補助方程式**という.

$$L(y) = y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{2.2$'$}$$

定理 2.6. (2.1$'$) の任意の 1 つの解を y_p とする．(2.2$'$) の解を z とする．このとき (2.1$'$) の解 y は

$$y(x) = z(x) + y_p(x)$$

とかける.

(証明) $\Leftarrow$:

$$L(z + y_p) = L(z) + L(y_p) = 0 + f$$

$\Rightarrow$:

$$L(y) = f \qquad L(y_p) = f$$

$$L(y) - L(y_p) = f - f = 0$$

$y - y_0 = z$ とおくと微分と関数をかける操作は線型であることから

$$L(z) = L(y - y_p) = 0$$

■

図は斉次方程式の解が黄土色の平面上にある vector で非斉次方程式の解は紫色の平面上の vector となることを示している.

定理 2.6. から (2.1$'$) を解くためには特殊解を見つければすべての解が求まる．特殊解の求め方は Lagrange の定数変化法による.

定理 2.7. (2.1$'$) の特殊解を y_p とすると (2.2$'$) の基本解 φ_1, φ_2 にたいして次の式から求まる：

$$y_p(x) = -\varphi_1(x)\int \frac{\varphi_2(\xi)f(\xi)}{W(\varphi_1,\varphi_2)(\xi)}d\xi + \varphi_2(x)\int \frac{\varphi_1(\xi)f(\xi)}{W(\varphi_1,\varphi_2)(\xi)}d\xi \tag{2.5}$$

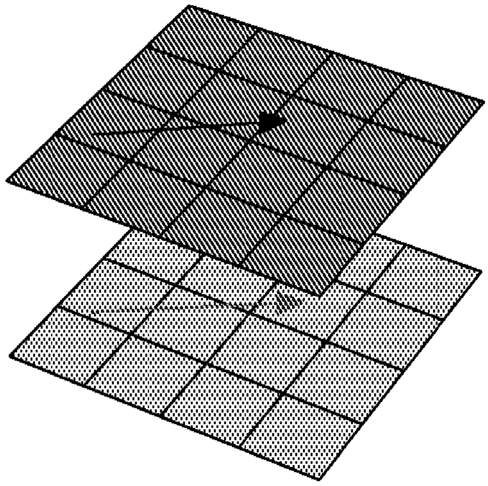

図 1: 解の構造

(証明)　$(2.2')$ の一般解は

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$$

である．Lagrange の定数変化法により

$$y_p = u_1(x)\varphi_1(x) + u_2(x)\varphi_2(x)$$

の形で $(2.1')$ の特殊解を求める．$u_1(x), u_2(x)$ は任意であるから次の条件を課す：

$$u_1'(x)\varphi_1(x) + u_2'(x)\varphi_2(x) = 0 \tag{2.6}$$

すると

$$\begin{aligned} y_p' &= u_1'(x)\varphi_1(x) + u_2'(x)\varphi_2(x) + u_1(x)\varphi_1'(x) + u_2(x)\varphi_2'(x) \\ &= u_1(x)\varphi_1'(x) + u_2(x)\varphi_2'(x) \\ y_p'' &= u_1'(x)\varphi_1'(x) + u_2'(x)\varphi_2'(x) + u_1(x)\varphi_1''(x) + u_2(x)\varphi_2''(x) \end{aligned}$$

これらを $(2.1')$ に代入して φ_1, φ_2 が $(2.2')$ の解だということを考慮して

$$u_1(\varphi_1'' + p_1\varphi_1' + p_2\varphi_1) + u_2(\varphi_2'' + p_1\varphi_2' + p_2\varphi_2) + u_1'\varphi_1' + u_2'\varphi_2' = f$$

すなわち

$$u_1'\varphi_1' + u_2'\varphi_2' = f \tag{2.7}$$

(2.6).(2.7) から u_1', u_2' の連立方程式だから

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \varphi_2 \\ f & \varphi_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix}} = \frac{-\varphi_2 f}{W(\varphi_1, \varphi_2)} \qquad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_1' & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix}} = \frac{\varphi_1 f}{W(\varphi_1, \varphi_2)}$$

これを積分して

$$u_1 = -\int \frac{\varphi_2 f}{W(\varphi_1, \varphi_2)}(\xi)d\xi, \quad u_2 = \int \frac{\varphi_1 f}{W(\varphi_1, \varphi_2)}(\xi)d\xi$$

これを y_p に代入して (2.5) をえる.

■

2002/2/8 版