第 4 章 2 個の常微分方程式の解の分類

§4.0. 第 4 章の目次

§4.1. 異なる固有値を持つ場合

n 階常微分方程式

$$f(x, y, y', y^{(2)}, \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{4.1}$$

未知関数 $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \cdots, y_n = y_n(x)$ およびその導関数 $y_1', y_2', \cdots, y_n'$ を含む n 個の方程式の組

$$f_j(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n') = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.2}$$

を 1 階連立常微分方程式という.

(4.1) は

$$y_1 = y, y_2 = y', \cdots, y_n = y^{(n-1)} \tag{4.3}$$

とおいて 1 階連立方程式

$$\begin{array}{l} y_1' = y_2, y_2' = y_3, \cdots, y_{n-2}' = y_{n-1} \\ f(x, y, y', y^{(2)}, \cdots, y^{(n)}) = 0 \end{array} \tag{4.4}$$

になる. (4.2) が $y_1', y_2', \cdots, y_n'$ について解けているとき正規型といい, それが $y_1, y_2, \cdots, y_n$ について 1 次式のとき, 線型であるという. (4.1) が正規型でかつ線型のとき

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = q(x) \tag{4.5}$$

となる. (4.3) により連立方程式になおすと

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = y_2, y_2' = y_3, \cdots, y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = -p_1 y_n - p_2 y_{n-1} - \cdots - p_n y_1 + q \end{array} \right. \tag{4.6}$$

すなわち

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ \mathbf{0} & & \cdots & 0 & 1 \\ -p_n & -p_{n-1} & \cdots & -p_2 & -p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

となる．これは

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

の型の特別な場合である．(4.7) で $f_1 = 0, f_2 = 0, \cdots, f_n = 0$ のとき，斉次形という．${}^t(y_1, y_2, \cdots, y_n) = y, \quad [a_{jk}(x)] = A$ とおくと (4.7) で斉次形のとき

$$y' = A(x)y \tag{4.8}$$

となる．以下は $A(x) = A(\mathrm{const})$ の場合のみ扱う．さらに斉次形のみを扱うので方程式は

$$y' = Ay \tag{4.9}$$

となる．

定理 4.1　A は $n \times n$ の実数を成分とする行列で n 個の相異なる実数値固有値を持つ．このとき $\forall y_0 \in \mathbf{R}^n$ にたいし (4.9) に対する初期値問題

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0 \tag{4.10}$$

は一意の解をもつ．

(証明)　A は対角化可能だから $\exists P$ 正則行列

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \text{\Large 0} \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \alpha_n \end{bmatrix} = B$$

$y = Pz$ で従属変数を y から z へ変換する．

$$Pz' = (Pz)' = Ay = APz$$

P は正則だから P^{-1} を左からかけて

$$\begin{aligned} z' &= P^{-1}APz = Bz \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \text{\Large 0} \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \alpha_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} z_i' &= \alpha_i z_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \\ z_i(x) &= z_i(0)e^{\alpha_j x} \end{aligned}$$

$y(x) = Pz(x)$ とおくと $y(x)$ が求める解である.

$$\begin{aligned} y(x) &= P(z_1(0)e^{\alpha_1 x}, \cdots, z_n(0)e^{\alpha_n x}) \\ y' &= Pz' = PBz = PBP^{-1}y \\ &= Ay \\ y(0) &= Pz(0) = PP^{-1}y_0 = y_0 \end{aligned}$$

微分方程式の解がこれ以外にないことは $y(x)$ が方程式の解で

$$z' = Bz \qquad z(0) = P^{-1}y_0 \tag{4.11}$$

の解であることとは同値だから, (4.10) が別の解を持てば (4.11) も別の解があることになるが B は対角型だからこれは不可能である.

■

例 4.1　次の連立常微分方程式を解く：

$$\begin{cases} x' = 6x - 3y - 7z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = 5x - 3y - 6z \end{cases}$$

この係数行列 A は

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

これは異なる固有値 $1, 2, -1$ を持つ. 対応する固有ベクトルは

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = 2 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_3 = -1 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

よって P は

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となり $P^{-1}AP$ は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

となる. $y = Pz$ なる新しい変数 z にたいして

$$z_1' = z_1,\ z_2' = 2z_2,\ z_3' = -z_3$$

より

$$z_1 = ae^t,\ z_2 = be^{2t},\ z_3 = ce^{-t}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ae^t \\ be^{2t} \\ ce^{-t} \end{bmatrix}$$

それゆえ

$$x(0) = x_0,\ y(0) = y_0, z(0) = z_0$$

のとき

$$\begin{cases} 2a + b + c &= x_0 \\ a - b &= y_0 \\ a + b + c &= z_0 \end{cases}$$

より (a, b, c) を求めると初期値問題の解が求まる.

//

§4.2. 2個の連立常微分方程式

2個の1階線形連立常微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= ax + by \\ \\ \dfrac{dy}{dt} &= cx + dy \end{cases} \tag{4.12}$$

を考察する.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

とおく. a, b, c, d は実数とする. $\boldsymbol{x} = {}^t[x, y]$ とおくと (4.12) は

$$\boldsymbol{x}' = A\mathbf{x}. \tag{4.12$'$}$$

特性多項式は

$$\begin{aligned} \det(xE - A) &= \begin{vmatrix} x - a & -b \\ -c & x - d \end{vmatrix} = (x-a)(x-d) - bc \\ &= x^2 - (a+d)x + ad - bc \end{aligned}$$

ここに $a + d = \mathrm{Tr}\ A = \mathrm{Tr}, ad - bc = \det\ A = \det$ とおき,
特性多項式の判別式は $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = (a-d)^2 + 4bc$ とおく.

判別式の正負により次の3つの場合に分かれる.

i) $\Delta > 0$ 相異なる2実根を持つ
ii) $\Delta = 0$ 2重の実根 $\alpha_1 = \alpha_2$
iii) $\Delta < 0$ 共役な2虚根 $\alpha_1 = \beta + i\gamma,\ \alpha_2 = \beta - i\gamma$

ここで i) は §4.1 で調べた. ii) は次の命題で2つの場合に分かれる.

命題 4.2　２重の実根を持つとき次の２つの場合が起こる:

Case (a)　$\dim \mathrm{Ker}(A-\alpha E)=2$ のとき

２つの１次独立な vector $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2$ にたいし解は

$$C_1 e^{\alpha t}\boldsymbol{a}_1 + C_2 e^{\alpha t}\boldsymbol{a}_2 \tag{4.13}$$

なる形をしている.

Case (b)　$\dim \mathrm{Ker}(A-\alpha E)=1$ のとき

vector $\boldsymbol{a}$: $A\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}$ にたいし

$$(A-\alpha E)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a} \tag{4.14}$$

となる vector $\boldsymbol{b}$ をとり, 解は

$$C_1 e^{\alpha t}\boldsymbol{a} + C_2(e^{\alpha t}\boldsymbol{b}+te^{\alpha t}\boldsymbol{a}) \tag{4.15}$$

なる形となる.

(証明)　Case (a) のとき $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2$ が $A-\alpha E$ の固有ベクトルだから

$$\begin{aligned}
A(C_1 e^{\alpha t}\boldsymbol{a}_1 + C_2 e^{\alpha t}\boldsymbol{a}_2) &= C_1 e^{\alpha t}A\boldsymbol{a}_1 + C_2 e^{\alpha t}A\boldsymbol{a}_2 \\
&= \alpha(C_1 e^{\alpha t}\boldsymbol{a}_1 + C_2 e^{\alpha t}\boldsymbol{a}_2) \\
\frac{d}{dt}(C_1 e^{\alpha t}\boldsymbol{a}_1 + C_2 e^{\alpha t}\boldsymbol{a}_2) &= \alpha(C_1 e^{\alpha t}\boldsymbol{a}_1 + C_2 e^{\alpha t}\boldsymbol{a}_2)
\end{aligned}$$

より (4.12') をみたす.

Case (b)　$\dim \mathrm{Ker}(A-\alpha E)=1$ のとき, この vector を $\boldsymbol{a}$ とする.

$$\boldsymbol{x}=e^{\alpha t}\boldsymbol{b}+te^{\alpha t}\boldsymbol{a}$$

とおく. これが方程式 (4.12') をみたすように $\boldsymbol{b}$ を定める. (4.12') に代入して $e^{\alpha t}$ でわると

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \alpha e^{\alpha t}\boldsymbol{b}+e^{\alpha t}\boldsymbol{a}+\alpha te^{\alpha t}\boldsymbol{a}$$

$$\alpha\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}+\alpha t\boldsymbol{a} = A\boldsymbol{b}+tA\boldsymbol{a}$$

$A\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}$ より

$$(A-\alpha E)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$$

$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$ より $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{o}$ また $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ の scalar 倍でない. $(A-\alpha E)$ を作用させて

$$\begin{aligned}
(A-\alpha E)^2\boldsymbol{b} &= (A-\alpha E)(A-\alpha E)\boldsymbol{b} \\
&= (A-\alpha E)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}
\end{aligned}$$

この vector $\boldsymbol{b}$ にたいして

$$\boldsymbol{x}=e^{\alpha t}\boldsymbol{b}+te^{\alpha t}\boldsymbol{a}$$

をつくると $\{e^{\alpha t}\boldsymbol{a},\ e^{\alpha t}\boldsymbol{b}+te^{\alpha t}\boldsymbol{a}\}$ が 1 次独立であることが $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\}$ が 1 次独立であることからからわかる.

■

例題 4.2　上の命題の (a) の場合である次の連立常微分方程式を解く：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & -2x \\ \\ \dfrac{dy}{dt} & = & -2y \end{cases}$$

係数行列 A は

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

でその固有値は -2(2 重根) で固有ベクトルは ${}^t(1,1), {}^t(1,-1)$ としてよい. 命題 4.2 の Case (a) の場合である. ゆえに解は命題の結論から

$$C_1 e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

となる.

//

例題 4.3　上の命題の Case (b) の場合である次の連立常微分方程式を解く：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & 5x - y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} & = & x + 3y \end{cases}$$

係数行列 A は

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

でその固有値は 4(2 重根) である. 固有値 4 に対応する固有ベクトルは ${}^t(1,1)$ である. それゆえ

$$\boldsymbol{x} = e^{4t}\boldsymbol{b} + te^{4t}\boldsymbol{a}$$

とおくと

$$(A-4E)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} = {}^t(1,1)$$

$\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, b_2)$ とおくと $b_1 - b_2 = 1$ となり $b_1 = 1, b_2 = 0$ として Case (b) の結論から解は

$$C_1 e^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\left\{e^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + te^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

となる.

//

命題 4.3. iii) の場合は, vector $\boldsymbol{a}$: $A\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a}$ にたいし

$$(A - \beta E)\boldsymbol{a} = \gamma\boldsymbol{b} \tag{4.16}$$

$$((A - \beta E)^2 + \gamma^2 E)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o} \tag{4.17}$$

なる vector $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$ と対応する vector $\boldsymbol{b}^1$, $\boldsymbol{b}^2$ にたいし (4.12') の解は

$$\boldsymbol{x} = C_1(e^{\beta t}\cos\gamma t\,\boldsymbol{a}^1 + e^{\beta t}\sin\gamma t\,\boldsymbol{b}^1) + C_2(e^{\alpha t}\cos\gamma t\,\boldsymbol{a}^2 + e^{\beta t}\sin\gamma t\,\boldsymbol{b}^2) \tag{4.18}$$

なる形をしている.

(証明)

$$\boldsymbol{x} = e^{\beta t}\cos\gamma t\boldsymbol{a} + e^{\beta t}\sin\gamma t\,\boldsymbol{b}$$

とおいて, これが (4.12) をみたすように定 vector $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を定める.

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \beta(e^{\beta t}\cos\gamma\,t\,\boldsymbol{a} + e^{\beta t}\sin\gamma t\,\boldsymbol{b}) + \gamma(-e^{\beta t}\sin\gamma t\,\boldsymbol{a} + e^{\beta t}\cos\gamma t\,\boldsymbol{b})$$

(4.12) に代入して $e^{\beta t}$ でわる. $\cos, \sin$ で整理して

$$\cos\gamma t(A\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{a} - \gamma\boldsymbol{b}) + \sin\gamma t(A\boldsymbol{b} - \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$$

すべての t で成立するから $\cos\gamma t$, $\sin\gamma t$ の係数はゼロとなる. よって

$$\begin{array}{rcl} (A - \beta E)\boldsymbol{a} & = & \gamma\boldsymbol{b} \\ (A - \beta E)\boldsymbol{b} & = & -\gamma\boldsymbol{a} \end{array}$$

上の $\boldsymbol{b}$ を下に代入して

$$[(A - \beta E)^2 + \gamma^2 E]\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$$

同様にして

$$[(A - \beta E)^2 + \gamma^2 E]\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$$

■

上の命題の例を示そう :

例題 4.4 次の連立常微分方程式を解く :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & 7x - y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} & = & 2x + 5y \end{cases}$$

係数行列 A は

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

でその固有値は $6 \pm i$(複素共役) である.

$$(A-6E)^2 + E = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

それゆえ $(A-6E)^2 + E = 0$ の 1 次独立な解として

$$\boldsymbol{a}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

としてよい.

$$\boldsymbol{a}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ にたいして } \boldsymbol{b}^1 = (A-6E)\boldsymbol{a}^1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ にたいして } \boldsymbol{b}^1 = (A-6E)\boldsymbol{a}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

よって

$$C_1 \left\{ e^{6t} \cos\, t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{6t} \sin\, t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} + C_2 \left\{ e^{6t} \cos\, t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{6t} \sin\, t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

をえる.

//

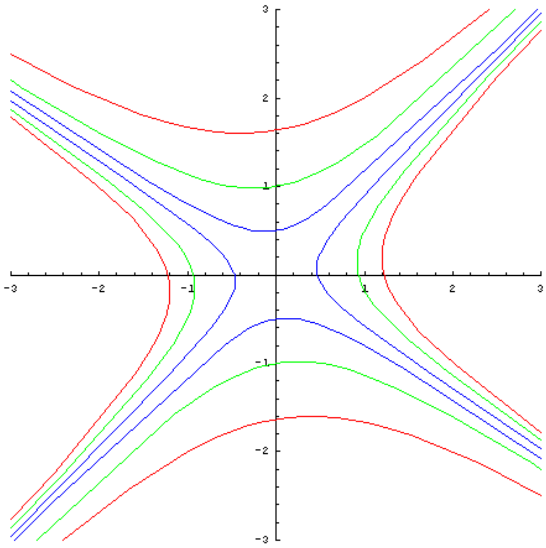

図 1: 鞍点

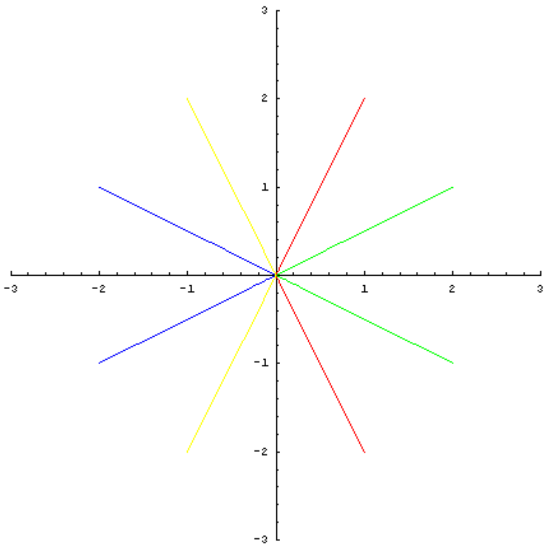

図 2: 焦点

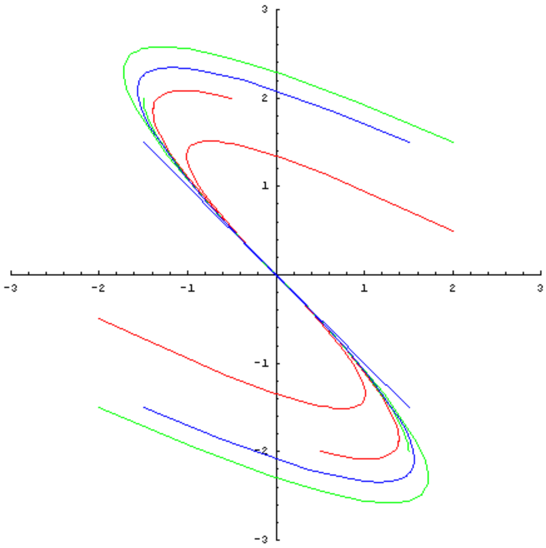

図 3: 結節点

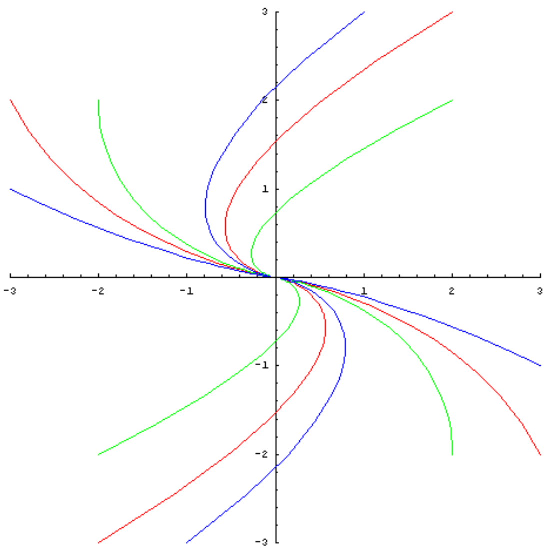

図 4: 変格結節点

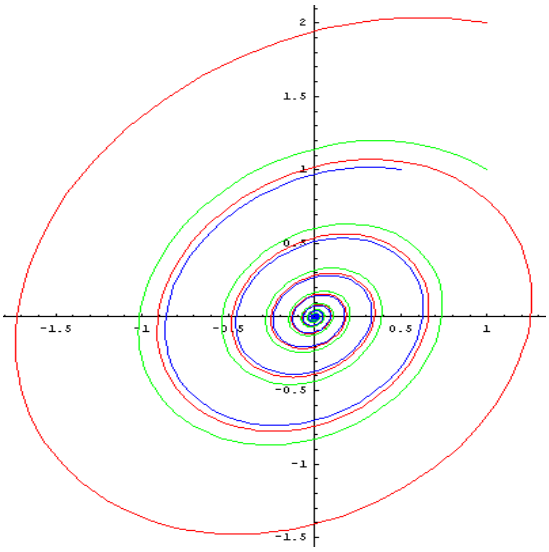

図 5: 渦状点

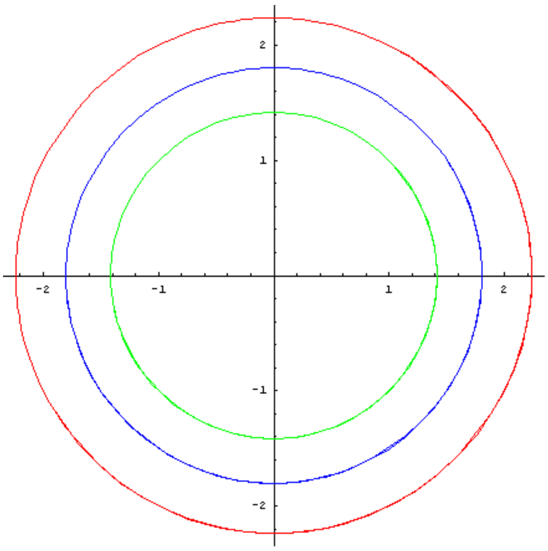

図 6: 渦心点

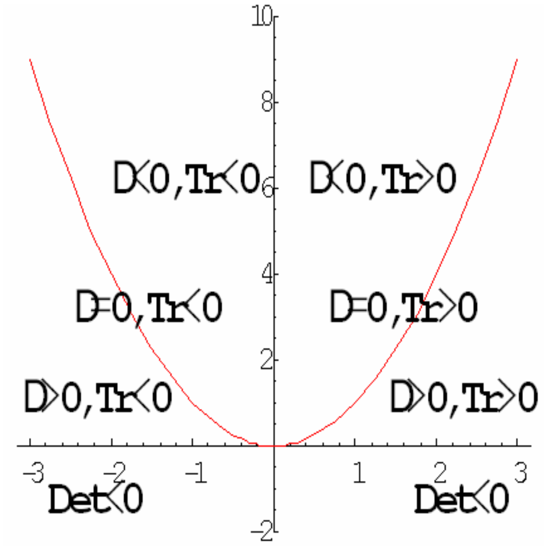

図 7: 解の分類

以上をまとめると次の定理になる：

定理 4.4　２個の線形常微分方程式 (4.12) は任意の初期値 $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ にたいし $-\infty < t < \infty$ で解が一意に存在し, t を消去した解は xy 平面で次の６つのタイプに分類される：

Case (I)　行列 A が異なる実の固有値を持つ場合は定理 4.1 の場合で, 解は図 1 の様に**鞍点**となる.

次の２つの場合 (II), (III) は, 解が $t \to \infty$ なるとき原点に収束する.

Case (II)　行列 A のすべての固有値が負となる：

実の固有値を持つ場合, 固有値が等しいときは命題 4.2 (a) の場合で, このとき解は図 2 の様になり**焦点**という.

実の異なる固有値を持つ場合は定理 4.1 の場合で図 3 のようになり, **結節点**という.

実の等しい固有値を持ち行列 A が対角化できないときは, 命題 4.2 (b) の場合で, 解は図 4 となり, **変格結節点**となる.

Case (III)　A の固有値が虚根となり負の実部を持つ場合は, 命題 4.3 となり, 解は図 5 となり, **渦状点**となる.

Case (IV)　A の固有値が純虚数となる場合は, 命題 4.3 となり, 解は図 6 となり**渦心点**となる.

次の２つの場合 (V), (VI) は解が $t \to \infty$ なるとき無限大になる場合である.

Case (V)　行列 A のすべての固有値が正となる：

実の固有値を持つ場合, 固有値が等しいときは命題 4.2 (a) の場合で, このとき解は図 2 の

様になり**源点**という (この場合は図としては焦点と同じ図となる).
実の異なる固有値を持つ場合は定理 4.1 の場合で図 3 のようになり, 結節点という.
実の等しい固有値を持ち行列 A が対角化できないときは, 命題 4.2 (b) の場合で, 解は図 4 となり, 変格結節点となる.
Case (VI)　A の固有値が虚根となり正の実部を持つ場合は, 命題 4.3 となり, 解は図 5 となり, 渦状点となる.

2007/11/5 版