

1. 次の線形写像 f について $\text{Im}f$ と $\text{Ker}f$ の基底と次元を求めよ .

$$(1) f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$$

$$(2) f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto (x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$$

2. x の実係数多項式全体の作るベクトル空間 $\mathbb{R}(x)$ の線形変換 $D : f(x) \mapsto f'(x)$, $I : f(x) \mapsto \int_a^x f(t)dt$ について問いに答えよ .

(1) $\text{Ker}D$ と $\text{Ker}I$ を求めよ .

(2) $D \circ I$ 及び $I \circ D$ を求めよ .

1 .	$\text{Im}f$, 次元	$\text{Ker}f$, 次元
(1)	$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle, 2$	$\langle \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, 1$
(2)	$\langle 1 \rangle, 1$	$\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, n-1$

2. (1) $\text{Ker}D = \langle 1 \rangle$, $\text{Ker}I = \{0\}$ (2) $D \circ I$ は恒等写像
 $I \circ D(f(x)) = f(x) - f(a)$