物理学基礎Ｉａ(初めての力学)演習問題

ベクトル、速度、加速度、運動学　　2006/05/08

０１．ベクトル$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$の成分をそれぞれ$\boldsymbol{A}$＝（１，－１，１）、$\boldsymbol{B}$＝（２，３，－１）として、$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$と、$\boldsymbol{A}$と同じ方向で向きが逆の単位ベクトル$\boldsymbol{D}$を求めよ。

０２．以下の行列式の値を求めよ。

a） $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$　b） $\begin{vmatrix} a & b & c \\ na & nb & nc \\ g & h & i \end{vmatrix}$　c） $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ d & e & d+e \\ g & h & g+h \end{vmatrix}$

０３．任意のベクトル$\boldsymbol{r}$を、単位ベクトル$\boldsymbol{e}$に平行な成分と垂直な成分とに分けよ。
ベクトル$\boldsymbol{b}$に関して、ベクトル$\boldsymbol{a}$に線対称なベクトルを求めよ。
ベクトル$\boldsymbol{b}$と$\boldsymbol{c}$で定められる平面に関して、ベクトル$\boldsymbol{a}$に面対称なベクトルを求めよ。

０４．ベクトル$\boldsymbol{A}$はあるパラメータsの関数で、単位ベクトルである。$\boldsymbol{A}$をsで微分したベクトルと、$\boldsymbol{A}$とは直交することを示せ。

０５．$\boldsymbol{r}\times d^2\boldsymbol{r}/dt^2=0$ならば、$\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r}/dt$の大きさが一定であることを示せ。

０６．$\boldsymbol{r}$＝（$\sin\theta\cos\phi$、$\sin\theta\sin\phi$、$\cos\theta$）というベクトルがある。θ、ϕは時間tの関数である。
①$\boldsymbol{r}$は単位ベクトルであることを示せ。
②$d\boldsymbol{r}/dt$を求めよ。
③$\boldsymbol{r}$と$d\boldsymbol{r}/dt$は直交することを示せ。
④$\boldsymbol{\omega}$＝（$-\sin\phi\cdot d\theta/dt$、$\cos\phi\cdot d\theta/dt$、$d\phi/dt$）として、
$d\boldsymbol{r}/dt=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$であることを示せ。

０７．位置ベクトル$\boldsymbol{r}$の方向の単位ベクトルを$\boldsymbol{\rho}$、$\boldsymbol{\rho}$に垂直で、θの増加する方向を向く単位ベクトルを$\boldsymbol{\sigma}$、$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{\sigma}$とする。座標系（$\boldsymbol{\rho}$、$\boldsymbol{\sigma}$）は、角速度$\boldsymbol{\omega}=d\theta/dt\cdot\boldsymbol{k}$で回転している座標系であるとして、極座標系での、速度、加速度の成分を求めよ。

０８．質点が等速度直線運動をするとき、直線外の定点のまわりの角速度は、質点とこの定点との距離の２乗に逆比例することを証明せよ。

０９．半径aの円周上を一定の速さvで動いている点Ｐがある。円周上の定点Ｏに関するＰの速度、加速度の動径成分と方位成分とを次の二通りの方法で求めよ。
a)Ｏを原点とし、Ｏをとおる直径と動径のなす角をθとすれば、極座標で
$$r=2a\cos\theta$$
と表される。極座標系での速度、加速度の成分の式を用いよ。
b)等速円運動の速度、加速度を成分に分けよ。

１０．平面運動をする動点の、その平面の中の定点に関する面積速度が一定であるときは、動点の加速度の方向は常にその定点を通ること、及び、逆に加速度が常に定点を通るときは、その定点に関する面積速度は一定になることを示せ。
【面積速度$dS/dt=|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|/2$】

１１．次の二つの場合について、質点の速度と加速度とをベクトルで表せ。
a)原点で静止していた質点が、一様な加速度で直線的に動き出したとき、
b)半径 a の円周に沿い、静止の状態から出発して、一様に増速しながら動くとき。

１２．ある直線運動において、通過距離 s と時間 t との間に、a および b を定数として $t=as+bs^2$ の関係があった。速度ならびに加速度を s の関数として表せ。

１３．真直ぐな棒ＯＡが一つの平面内において、その一端Ｏのまわりを、一定の角速度 ω で回っている。一つの点Ｐが一定の速さ v でこの棒上を外に向かって動くとすれば、この点はどんな経路を描くか。なおその加速度を求めよ。

１４．xy 平面内で、点Ｐが $x=a\cos\omega t$，$y=b\sin\omega t$ によって与えられるような運動をしている。その　軌道および任意の時刻での速度と加速度との各成分を求めよ。また原点をＯ，ＰＯ＝r とすれば、加速度の大きさは $\omega^2 r$ となることを証明せよ。加速度の向きはどのように表されるか。

１５．次の各文中に使われている「力」を　ａ）厳密な意味での力、ｂ）力と同じ次元をもち、広い意味での力、ｃ）力学的な概念ではあるが、力とは次元の違うもの、ｄ）力学的な概念ではないもの、に分類せよ。
１）地球に働く太陽の万有引力は、地球と同じ断面積をもつ鉄の棒をもってしても支えきれないほど強い。
２）海面下の圧力は１０ｍ毎に約１気圧あがる。
３）原子力発電に関する広告は、安全性、経済性を強調したものが多い。
４）真空中で１ｋｍ離れた１クーロンの電荷どうしに働くクーロン力は約１ｔｏｎ重である。
５）地表面での重力はいたるところで垂直である。
６）重量800ｋｇ重、最高時速250ｋｍ／ｈ，300馬力のスポーツカーと重量２ｔｏｎ重、最高時速100ｋｍ／ｈ，100馬力のトラックが綱引きをすれば、トラックが勝つ。

１６．一辺２a の正方形の軽い板が直径２b のコップの上に中心を一致させてのっている。板の中心には小さな硬貨がのっている。板を急に速度 v で水平に引く場合、
a)硬貨が板から落ちない条件
b)硬貨がコップ内に落ちる条件
を求めよ。硬貨と板のすべり摩擦係数を μ' とする。

１７．一定の初速 v_0 で投げて、ある点Ｐ（a，b）を通過させるのに、投射角が二つあることを示し、これらの角の間の関係を求めよ。

１８．傾角 β の斜面の上の一つの点から、最大傾斜線を含む鉛直面の中で、斜面と角 α をなす方向に初速 V で質点を投げたとする。斜面に平行に x 軸、垂直に y 軸をとって、質点の落下する位置を求めよ。

１９．傾角 β の斜面がある。最大傾斜面を含む鉛直面の中で一定の初速度 v_0 で質点を投げ上げて、斜面上で一番遠くへとどかせるには、どの方向に投げればよいか。

２０．傾角 β の斜面の上の一つの点から、最大傾斜面を含む鉛直面の中で、斜面と角 α をなす方向に初速 V で質点を投げたとする。斜面に落下したときの速さが v、斜面となす落角が λ（$<\pi/2$）であれば、次の関係があることを示せ。

$$V\sin\alpha=v\sin\lambda,\quad \cot\alpha-\cot\lambda=2\tan\beta$$

斜面に平行に x 軸、垂直に y 軸をとって、答えよ。

２１．水平面と傾角θの斜面とが滑らかに接続している。水平面上を、境界線の法線となす角α、速さvで滑ってきた小物体の斜面上の運動を求めよ。

２２．三つの質点を同時に原点Oから同じ鉛直面内で、初速度それぞれv_0、v_0、$\sqrt{3}v_0$で、仰角90°、30°および０°の方向に放射すれば、各質点は常に一直線上にあることをしめし、またこの直線がどのように動くかを調べよ。【初速度か角度に誤り？】

２３．重力と、空気から速さの２乗に比例する抵抗力を受ける物体が鉛直上方に初速度v_0で投げ上げられたとき、【運動方程式は上下で異なる。】
①最高点の高さを求めよ。【運動方程式をvとyで書き直すこと。】
②下降のときの最終速度を求めよ。
③最高点に達したときからの時間で下降の場合の位置を表せ。

２４．初速度v、水平面に対する角度θで投げあげた小物体の軌跡を求めよ。ただし、空気から速度に比例する抵抗力$-kv$を受けるものとする。

２５．滑らかな直線上に拘束されている質点が、直線外の定点から距離に比例する引力を受けるとき、どのような運動をするか。【一様な球体内部のトンネルの問題】

２６．地球を均質な球と仮定する。地球内部に開けられた滑らかで真直ぐなすべてのトンネル内の質点は、同じ周期の単振動をすることを示せ。（地球内部での引力は、内部が均質であれば、中心からの距離に比例する。）

２７．地球表面で周期１秒の振り子時計は、月の表面ではどれだけの周期をもつか。ただし地球と月の半径ならびに質量の比をそれぞれ１１：３および８１：１とする。

２８．バネ定数kのバネで質量mのおもりをつるしたら、バネはdだけ伸びて釣り合った。そこでこのおもりを初速vで下方にはじくと、どこまで下がるか。

２９．中心線が鉛直な放物線$y=ax^2$上に束縛された質点が原点の付近で運動するとき、それが単振動であることを導き、その振動数を求めよ。

３０．水平な床の上の質量Mと質量mの二つの小物体がバネ定数kのバネでつながれている。
a) 小物体と床の間に摩擦がないとき二つの小物体の単振動の周期を求めよ。
b) 質量Mの小物体と床の間に静止摩擦係数μの摩擦が働くとき単振動の周期を求めよ。また、単振動の振幅の最大値を求めよ。

３１．バネ定数kのバネにつながれた質量mの小物体を内部に含む質量Mの箱が水平面上にある。
a) 水平面及び箱の内部に摩擦がないとき、バネによる箱と小物体の単振動の周期を求めよ。
b) 水平面と箱との間の摩擦係数がμのとき、小物体の単振動の振幅の最大値を求めよ。

３２．質量Mの小物体を乗せた質量mの水平な板が、ばね定数kの軽いばねに結びつけられている。この板が振幅Aの単振動を行なうとき、板が小物体から受ける力の最大値と最小値を求めよ。小物体が板から離れないAの範囲を求めよ。

３３．単振子（長さl、おもりの質量m）をつるす点が、軽いばねによって水平に左右に動きうるようになっている。ばねの弾性係数をkとして、その周期を求めよ。

３４．滑らかな水平に張った針金に質量mの環をはめ、環に長さLの軽い糸を結び、その他端には質量Mのおもりをつるして微小振動をさせた。おもりの振動周期を求めよ。

３５．自然長l、バネ定数kのバネに質量mの小物体Ａが釣下げられている。Ａには更に、質量mの小物体Ｂを釣下げた同種のバネが繋がれている。重力の作用のもとで、Ａ，Ｂが鉛直に振動するとき、Ａ，Ｂの運動を求めよ。

３６．物体が曲線$x=2\cos\theta$、$y=3\sin\theta$に沿って$\theta=0$から$\theta=2\pi$まで動くとき、力$\boldsymbol{F}=(x-3y,\ y-2x)$がこの物体になす仕事を求めよ。また力が$\boldsymbol{F}'=(x-2y,\ y-2x)$の場合はどうか。$\boldsymbol{F}$と$\boldsymbol{F}'$で違いがあるとすれば、その物理的意味を考察せよ。

３７．地球の中心から距離rの点にある質量mの小物体の位置エネルギーを求めよ。但し、地球は均一な球で、地球内部の点に働く万有引力は、その点を仮想的な表面とする球体が及ぼす万有引力に等しいものとする。

３８．質量mの粒子がポテンシャル　$U(r)=-ar^{-1}+br^{-2}$　$a,\ b>0$ の力場にある。釣合の位置、及び、その点近傍での単振動の周期を求めよ。

３９．３つの固定点のそれぞれから、距離に比例する中心力をうけている質点がある。この質点に働く力のポテンシャルは釣合の位置を軸とする回転放物面であることを証明せよ。

４０．一つの平面の中で運動する質量mの質点に働く力の成分が質点の座標を$(x,\ y)$、aを正の定数として

a) $X=axy$、$Y=ax^2$

b) $X=-ay$、$Y=-ax$

c) $X=-ay$、$Y=ax$

で与えられている。これらの力は保存力であるかどうか検討せよ。保存力であるならば、そのポテンシャルを、またすべての場合について、$t=0$で$x=y=0$、$v_x=0$、$v_y=v_0$として質点の運動を求めよ。

４１．$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$　のとき、$\partial f/\partial x$、$\partial f/\partial y$、$\partial^2 f/\partial x^2$、$\partial^2 f/\partial y^2$、$\partial^2 f/\partial x\partial y$、$\partial^2 f/\partial y\partial x$を求めよ。

４２．以下の式が成立することを示せ。

① $\nabla r=\boldsymbol{r}/r$

② $\nabla(1/r)=-\boldsymbol{r}/r^3$

③ $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3$

④ $\nabla\cdot(\boldsymbol{r}/r^3)=0$

⑤ $\nabla\times\boldsymbol{r}=0$

⑥ $\nabla r^2=2\boldsymbol{r}$

４３．質量mの質点が中心力$-m\omega^2\boldsymbol{r}$を受けて運動するとき、

①平面運動であることを証明せよ。【最初の位置$\boldsymbol{r}_0$と初速度$\boldsymbol{v}_0$で$\boldsymbol{r}$を表すのも一つの方法。】

②軌跡は力の中心を中心とする楕円であることを証明せよ。

③一周期についての運動エネルギー$(m\boldsymbol{v}^2/2)$と位置エネルギー$(m\omega^2\boldsymbol{r}^2/2)$、それぞれの平均値は等しいことを証明せよ。

４４．地球がｘ軸上の定点Ｏにあり、無限遠方から流星群が速さ v_0でｘ軸に平行に地球に接近している。ｘ軸を対称軸とした場合に、地球に衝突する流星群の断面積は充分遠方でどの範囲にあるか。ただし、無限遠方では、流星群への万有引力の影響は無視できるものとする。

４５．質量mで速度 v_0の粒子が、 $f = k\ r^{-3}$に従う反発的中心力場に入って来たとする。ここでkは定数である。次のものを計算せよ。
①力の中心に正面衝突するように粒子が近づいて来たときの最近接距離D
②一般の場合の最近接距離 dをDと衝突径数 b（中心線との距離）を使って表せ。

４６．距離に比例する反発力を受けている質点の運動を求めよ。

４７．赤道上hの高さの点から小物体を自由落下させた。地表に落ちる点を求めよ。
地表に固定した回転座標系で考えよ。

４８．赤道上の点から初速度 v_0で小物体を鉛直上方に打ち上げた。地表に落ちる点を求めよ。
地表に固定した回転座標系で考えよ。

４９．北半球の緯度λの地点付近の幅 bの海峡に沿って、潮流が速さ vで北へ流れている。
東海岸と西海岸では潮位がいくら違うか。

５０．緯度λの点を速さ vで走る質量mの列車の重量は東に走る時と、西に走る時とでいくら違うか。

５１．回転する滑らかな直線に拘束された質点の運動（ω＝一定、水平面内の運動）について調べよ。問題を回転座標系と慣性系の双方で解け。

５２．一定の加速度αで上昇するエレベーターの中にいる人が、エレベーターに対する相対速度 Vで球を鉛直に投げ上げて、T秒ののちにこれを捕らえた。加速度αを求めよ。
投げ上げるときに、人のなした仕事、及び、球のエレベーターに対する相対的な最高点を求めよ。

５３．速度 $\boldsymbol{v}$、電荷 qの粒子は、電場から $q\boldsymbol{E}$、磁場から $q\ \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$の力を受ける。力を受けない空間から、ｘの正方向へ大きさEの電場と、ｚ方向へ強さBの磁場が同時に存在する空間へ、速度（ v、０、０）で飛び込んだ、電荷 q、質量mの粒子の運動を求めよ。