# 付　録



## (A) 指数分布・ポアソン分布・ガンマ分布

$T_1,T_2,\ldots,T_n$ はパラメーター $\alpha$ の指数分布に従う互いに独立な確率変数とする、すなわち $P(T_i > t) = \exp(-\alpha t)$ ,$i = 1,2,\cdots,n$。このとき、$S_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$ は $n$ 回事象が起こるまでの待ち時間となる。

**定理 A1**

（1）$S_n$ の確率分布密度はガンマ分布：$\dfrac{d}{dx}P(S_n \le x) = g_n(x) = \alpha\dfrac{(\alpha x)^{n-1}}{(n-1)!}\exp(-\alpha x)$。

これより $P(S_n > x) = \exp(-\alpha x)\left\{1+\dfrac{\alpha x}{1!}+\ldots.+\dfrac{(\alpha x)^{n-1}}{(n-1)!}\right\}$

（2）$N(t)$ を時刻 t までに起こる事象の回数、すなわち $S_k \le t$ となる最大の $k$ の値とする。このとき、$N(t)$ の分布はポアソン分布となる。

$$P(N(t) = n) = \frac{(\alpha t)^n}{n!}\exp(-\alpha t)$$

(証明)

（1）$n = 1$ のとき、$S_1 = T_1$ なので、$g_1(x) = \alpha\exp(-\alpha x)$ が成り立つ。

$n$ まで成り立つと仮定して $n+1$ のとき

$$g_{n+1}(t) = \int_0^t g_n(t-x)g_1(x)dx = \frac{\alpha^{n+1}}{(n-1)!}\exp(-\alpha t)\int_0^t x^{n-1}dx = \alpha\frac{(\alpha t)^n}{n!}\exp(-\alpha t)$$

これより $S_n$ の分布関数は関係式 $P(S_n \le x) = \int_0^x g_n(t)dt = 1 - P(S_n > x)$ より上の結果が得られる。

（2） $P(N(t)=n)=P(S_n \le t$ かつ $S_{n+1}>t)=P(S_n \le t)-P(S_{n+1} \le t)$

$$=P(S_{n+1}>t)-P(S_n>t)=\frac{(\alpha t)^n}{n!}\exp(-\alpha t)$$ ポアソン分布

「参考」 ガンマ関数

$\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}\exp(-x)dx,\ \Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1$ より 部分積分により n が自然数のとき、$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$、よって $\Gamma(n+1)=n!$。

$[0,\infty)$ 上の分布であるガンマ分布密度関数は次式で定義される。

$f_{\alpha,\nu}(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\alpha^\nu x^{\nu-1}\exp(-\alpha x),\quad \alpha>0,\ \nu>0$ の実数。

特に $\nu=1$ のとき $f_{\alpha,1}(x)=\alpha\exp(-\alpha x)$ は指数分布密度関数で、$\nu=n$（自然数）のとき

$f_{\alpha,n}(x)=g_n(x)$ となる。

**(B) 超幾何関数**

ガウスの超幾何関数、合流型超幾何関数は次の無限級数で表現される。

ガウスの超幾何関数

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots+\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}x^n+\ldots\ldots$$

合流型超幾何関数

$$F(\alpha,\gamma;z)=1+\frac{\alpha}{1\cdot\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)}z^2+\ldots+\frac{(\alpha)_n}{n!(\gamma)_n}z^n+\ldots\ldots=\lim_{\beta\to\infty}F(\alpha,\beta,\gamma;\frac{z}{\beta})$$

ただし $(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)$

種々の初等関数は超幾何関数で表すことができる。

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots\ldots+\frac{n!}{n!}x^n$$

$$=1+\frac{(-n)}{1}(-x)+\frac{(-n)(-n+1)}{1\cdot 2}(-x)^2+\ldots\ldots+\frac{(-n)_n}{n!}x^n=F(-n,\beta,\beta;-x)$$

同様に $(1-x)^\alpha=F(-\alpha,\beta,\beta;x)$

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots=xF(1,1,2;-x)$$

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ldots=F(\alpha,\alpha;x)$$ （合流型超幾何関数）

ガウスの超幾何関数 $y=F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ は次の超幾何微分方程式を満たす。

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}+\{-\gamma+(1+\alpha+\beta)x\}\frac{dy}{dx}+\alpha\beta\, y=0$$

合流型超幾何関数 $y=F(\alpha,\gamma;x)$ は次の合流型超幾何微分方程式を満たす。

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-x)\frac{dy}{dx}-\alpha\, y=0$$

この二つの微分方程式から変数変換を施すと、種々の微分方程式が導かれる。

ルジャンドルの微分方程式：$(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+\nu(\nu+1)y=0$

エルミートの微分方程式：$\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+2\nu\, y=0$

ラゲールの微分方程式：$x\dfrac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\dfrac{dy}{dx}+\nu\, y=0$　（$\nu$ は全て定数）

このように超幾何関数、合流型超幾何関数は２階の微分方程式の解として現れる。

## (C) スターリング数

### (C.1) 第１種スターリング数

集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ から $\{1,2,\cdots,n\}$ への１対１上への写像、すなわち $\{1,2,\cdots,n\}$ の置換を

$\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\ i_1&i_2&i_3&\cdots&i_n\end{pmatrix}$ とする。任意の置換は巡回置換の積で表わせる。例えば、

$\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ 3&1&2&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5\end{pmatrix}$ と成る。巡回置換 $1\to3\to2\to1,\ 4\to5\to4$

をそれぞれ $\begin{pmatrix}1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&5\end{pmatrix}$ で表す。k 個の要素の巡回を「位数 k の巡回」と言う。

上の例ではそれぞれ位数３と位数２の巡回である。集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ の置換全体の集合を $\Pi_n$ で表わす。$|\Pi_n|=n!$ である。k 個の巡回置換の積に表わされる $\pi\in\Pi_n$ の個数を第１種スターリング数と呼び $S(n,k)$ で表わす。$n=3$ のとき、$|\Pi_3|=3!=6$ であり

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=(1)(2)(3),\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=(1,2)(3),\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=(1,3)(2),\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=(1)(2,3)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1,2,3),\ \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(1,3,2)$$

これより $S(3,1)=2,\ S(3,2)=3,\ S(3,3)=1$ となる。

**定理 C1**.　$S(n,k)$は漸化式　$S(n+1,k)=S(n,k-1)+nS(n,k),\ (n,k\geq 1)$を満たす。
ただし$S(0,0)=1,\ S(n,0)=S(0,k)=0\ (n,k\geq 1)$とする。

（証明）数字$\{1,2,\cdots,n+1\}$の置換でk個の巡回置換の積に分解できる置換の数は数字n+1に着目して、すでに$\{1,2,\cdots,n\}$の置換が$k-1$個の巡回置換に分解されているならばn+1だけで1つの巡回置換として付け加えればよい。また$\{1,2,\cdots,n\}$の置換が$k$個の巡回置換に分解されているならば数字n+1をいづれかの巡回置換のどこかに挿入すれば良いが、入る場所はn通りある。よって$S(n+1,k)=S(n,k-1)+nS(n,k),\ (n,k\geq 1)$がなりたつ。

**定理 C2**. 自然数nを固定したとき、$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}S(n,k)x^k=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$。

（証明）$n\geq 1$のとき展開して$F_n(x)=x(x+1)\cdots(x+n-1)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}b(n,k)x^k$とする。
$n=0$のときは$F_0(x)\equiv 1,\ b(0,0)=1$とし、$b(n,0)=b(0,k)=0\ (n,k\geq 1)$である。

$$F_n(x)=(x+n-1)F_{n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n}b(n-1,k-1)x^k+(n-1)\sum_{k=0}^{n-1}b(n-1,k)x^k$$

これより$n,k\geq 1$のとき、$b(n,k)=(n-1)b(n-1,k)+b(n-1,k-1)$を得る。$b(n,k)$は$S(n,k)$と同じ漸化式を満たし、初期条件も同じなので、両者は一致する。

### (C.2) 第2種スターリング数

n個の異なる要素から成る集合をk個の互いに素な空でない部分集合に分割する方法の数を$S_n^{(k)}$で表わし、第2種のスターリング数と言う。明らかに$S_n^{(1)}=1,\ S_n^{(n)}=1$であり、集合$\{a,b,c\}$を二つに分割する方法は$\{(a,b),(c)\},\ \{(a,c),b\}$、$\{(b,c),a\}$の3通りなので、$S_3^{(2)}=3$である。また$S_n^{(2)}=2^{n-1}-1,\ S_n^{(n-1)}={}_nC_2$である。明らかに$k>n$のとき、$S_n^{(k)}=0$である。$S_n^{(0)}=0$であり、便宜的に$S_0^{(0)}=1$と置く。第2種スターリング数を具体的に表現することは難しいが次のような漸化式が成り立つ。

**定理 C3**　$S_{n+1}^{(k)}=S_n^{(k-1)}+kS_n^{(k)}$

（証明）n+1個のものをk個のブロックに分割するには、次の二つの方法のいずれかである。第1の方法は、ある一つのものに着目し、残りn個をk個のブロックに分割し、最初のものをこれらのブロックのいずれかに置く方法でこれは$S_n^{(k)}\times k$通りある。第2の方法はn個を$k-1$個のブロックに分け、残り1つをそれ自身で1つのブロックを作

る方法で、$S_n^{(k-1)}$通りある。よって、　$S_{n+1}^{(k)} = S_n^{(k-1)} + kS_n^{(k)}$。

これ以外にも次のような関係式が知られている。

**定理 C 4**

（1）$S_n^{(k)} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}{}_kC_j \times j^n$

（2）$\sum_{n\ge k} S_n^{(k)} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^x - 1)^k$，$k \ge 0$

（3）$\sum_{n\ge k} S_n^{(k)} x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}$

(証明)

（2）の証明：　$F_k(x) = \sum_{n\ge k} S_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}$ とする。　$F_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(0)} \frac{x^n}{n!} = 1$ である。

定理C 3より $F_k(x) = k\sum_{n\ge k} S_{n-1}^{(k)} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n\ge k} S_{n-1}^{(k-1)} \frac{x^n}{n!}$、両辺をｘで微分すると

$\frac{d}{dx}F_k(x) = kF_k(x) + F_{k-1}(x)$。帰納法の仮定として $F_{k-1}(x) = \frac{(e^x-1)^{k-1}}{(k-1)!}$ とすると、

初期条件 $F_k(0) = 0$ より微分方程式の解は

$$F_k(x) = \left\{\int_0^x \frac{(e^t-1)^{k-1} \times e^{-kt}}{(k-1)!} dt\right\} e^{-kx} = \frac{1}{(k-1)!}\{\int_{\exp(-x)}^{1} (1-u)^{k-1} du\} \times e^{-kx}$$

$$= \frac{1}{k!}(e^x - 1)^k$$

（1）の証明：　二項展開により $\frac{1}{k!}(e^x-1)^k = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}{}_kC_j e^{jx}$。（2）より

両辺の $\frac{x^n}{n!}$ の係数を比較すると（1）を得る。

（3）の証明：$G_k(x) = \sum_{n\ge k} S_n^{(k)} x^n$ とする。明らかに $G_0(x) = \sum_{n\ge 0} S_n^{(0)} x^n = 1$。

定理1より

$$G_k(x) = k\sum_{n\ge k} S_{n-1}^{(k)} x^n + \sum_{n\ge k} S_{n-1}^{(k-1)} x^n = kx\sum_{n\ge k} S_{n-1}^{(k)} x^{n-1} + x\sum_{n\ge k} S_{n-1}^{(k-1)} x^{n-1}$$

$$= kxG_k(x) + xG_{k-1}(x)$$

帰納法の仮定として $G_{k-1}(x) = \frac{x^{k-1}}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-(k-1)x)}$ とすると、上式より

$G_k(x) = \frac{xG_{k-1}(x)}{1-kx} = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}$ を得る。

## (D) 包含と排除の原理

$S$ を n 個の要素から成る集合とする。$S$ の部分集合を $A,B,C$ などで表わす。

集合Aの要素の数を $|A|$ で表わし、$|B-A|$ は集合 $B\cap\overline{A}$ （$\overline{A}$ は $A$ の補集合）に含まれる要素の数を表わす。$S$ の各部分集合に対して、実数値を与える関数を $f$ とする（任意の $A\subset S$ に対して $f(A)\in R$）。このような関数 $f$ の集合を $V$ とする。通常の加法、減法、実数倍に関して $V$ はベクトル空間を作る。このとき、次の定理が成り立つ。

__定理 D1__

ベクトル空間 $V$ から $V$ への線形変換 $\Phi$ を、$\Phi\bigl(f(A)\bigr)=\sum_{B\supseteq A}f(B)$ で定義する。このとき、

$\Phi$ の逆変換 $\Phi^{-1}$ が存在し、$\Phi^{-1}\bigl(f(A)\bigr)=\sum_{B\supseteq A}(-1)^{|B-A|}f(B),\ (A\subseteq S)$ で与えられる。

（証明）線形変換 $\Psi:V\to V$ を $\Psi\bigl(f(A)\bigr)=\sum_{B\supseteq A}(-1)^{|B-A|}f(B)$ で定義すると、

$$\Psi\Phi\bigl(f(A)\bigr)=\sum_{B\supseteq A}(-1)^{|B-A|}\Phi f(B)=\sum_{B\supseteq A}(-1)^{|B-A|}\left\{\sum_{C\supseteq B}f(C)\right\}=\sum_{C\supseteq A}\left(\sum_{\substack{B\\(C\supseteq B\supseteq A)}}(-1)^{|B-A|}\right)f(C)$$

$A,C\ (A\subseteq C)$ を固定して、$|C-A|=m$ とすると、$i=0,1,2,\cdots,m$ に対して、$|B-A|=i$

となる $B\ (C\supseteq B\supseteq A)$ の選び方は ${}_mC_i$ 通りあるので $\displaystyle\sum_{\substack{B\\(C\supseteq B\supseteq A)}}(-1)^{|B-A|}=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i{}_mC_i=\delta_{m,0}$。

よって $\Psi\Phi\bigl(f(A)\bigr)=f(A)$、すなわち、$\Psi=\Phi^{-1}$ である。

＜例１＞　集合Ｓ とＳの要素の性質（各要素が満たすあるいは満たさない属性）の集合を $\Gamma$ とする。$\Gamma$ の部分集合 $\alpha$ に対して $\alpha$ に属す性質を全て満たし、$\Gamma-\alpha$ に属す性質は満たさないような要素の集合の数を $f(\alpha)$ で表わす。少なくとも $\alpha$ に属す性質は全て満たすような要素の個数を $g(\alpha)$ で表わす。あきらかに $g(\alpha)=\sum_{\beta\supseteq\alpha}f(\beta)$

$g(\alpha)=\Phi(f(\alpha))$ なので、定理より $f(\alpha)=\Phi^{-1}(g(\alpha))=\sum_{\beta\supseteq\alpha}(-1)^{|\beta-\alpha|}g(\beta)$。

一般に $f(\alpha)$ に比べ $g(\alpha)$ の計算の方がより容易である場合が多い。

$|\beta-\alpha|=0$ のとき $\beta=\alpha$ より、$f(\alpha)=g(\alpha)-\displaystyle\sum_{\substack{\beta\\|\beta-\alpha|=1}}g(\beta)+\sum_{\substack{\gamma\\|\gamma-\alpha|=2}}g(\gamma)-\cdots$ と書ける。

これは$f(\alpha)$の第１近似値としてまず$g(\alpha)$とし、第２近似として修正項$-\sum_{\substack{\beta\\|\beta-\alpha|=1}} g(\beta)$を加え、さらに第３次近似と言うように左辺と等しくなるまで続ける。

＜例２＞　n個の要素から成る集合Sについて、例１の式で$\alpha=\phi$（空集合）とすると

$$\begin{aligned} f(\phi) &= \sum_{\beta}(-1)^{|\beta|} g(\beta) = g(\phi) - \sum_{|\beta|=1} g(\beta) + \sum_{|\gamma|=2} g(\gamma) - \cdots \\ &= n - \sum_{|\beta|=1} g(\beta) + \sum_{|\gamma|=2} g(\gamma) - \cdots \end{aligned} \tag{D-1}$$

ここで、$g(\phi)$は何の条件も満たす必要はない要素の数なので$g(\phi)=|S|=n$、$f(\phi)$は属性の集合$\Gamma$のどの条件も満たさない要素の個数を表わしている。
この式の応用例として集合Sの部分集合を$A_1, A_2, \cdots, A_m$とする。部分集合$A_i$の要素であるという属性を$\alpha_i$とし$\Gamma=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$とする。例１の定義より

$g(\alpha_i)=|A_i|$, $g(\alpha_i, \alpha_j)=|A_i \cap A_j|$、一般に$\alpha=\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_k}\}$のとき

$g(\alpha)=|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$。また$f(\phi)=n-|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m|$なので(D-1)式より整理するとよく知られた次の公式が得られる。

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| &= \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots \\ &\quad + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m| \end{aligned} \tag{D-2}$$

## (E) ヘルダーの不等式

測度$m(x)$を持つ測度空間$X$上に定義された関数$f(x)$について$|f(x)|^p$が可積分な$f(x)$の集合を$L^p(X,m)$と書く。$L^p(X,m)=\{f(x); \int_X |f(x)|^p dm(x) < \infty\}$。

**定理 E１**

$p, q > 1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$とする。$f(x) \in L^p(X,m)$, $g \in L^q(X,m)$ならば$f\,g \in L^1(X,m)$

かつ　$\|f\,g\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$。ここで$\|f\|_p = \{\int_X |f(x)|^p m(dx)\}^{1/p}$と定義する。

（証明） $\log x$ は上に凸のグラフなので $\log(\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}) \geq \frac{1}{p}\log x^p + \frac{1}{q}\log y^q = \log xy$

よって $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$。この不等式に $x \Rightarrow \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$, $y \Rightarrow \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$ を代入すると

$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p{}^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q{}^q}$、両辺を積分すると

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_X |f(x)g(x)|m(dx) \leq \frac{1}{p}\frac{\int_X |f(x)|^p m(dx)}{\|f\|_p{}^p} + \frac{1}{q}\frac{\int_X |g(x)|^q m(dx)}{\|g\|_q{}^q}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad \text{(終)}$$

一般に $\frac{1}{p_1}+....+\frac{1}{p_n}=1$, $(p_1,...,p_n>1)$ とした時、$f_i \in L^{p_i}(X,m)$ $(i=1,2,..,n)$

ならば $f_1f_2...f_n \in L^1(X,m)$ かつ $\|f_1...f_n\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1}...\|f_n\|_{p_n}$ が成り立つ。

**(F)　再帰性と非再帰性**

マルコフ連鎖 $X_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ に対して

$T^*(i) = \inf\{n \geq 1\,; X_n = i\}$ ： マルコフ連鎖がはじめて状態 $i \in S$ に到達する時刻。

$f_n(i) = P(T^*(i) = n | X_0 = i\}$ ： 時刻 $n \geq 1$ で状態 $i$ に初めて戻る確率。

$\bigcup_{n\geq 1}\{T^*(i)=n\} = \{T^*(i)<\infty\}$ より $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(i) = P(T^*(i)<\infty | X_0 = i) \leq 1$。

**[定義]**

状態 $i \in S$ が再帰的(recurrent) $\Leftrightarrow P(T^*(i)<\infty|X_0=i) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(i) = 1$

（有限時間内に状態 $i$ へ戻る確率が１）

再帰的でない状態を過渡的（transient）という。

**補助定理 F 1**

$$P^{(n)}(i,i)=\sum_{k=0}^{n} f_k(i)P^{(n-k)}(i,i) \qquad n\geq 1 \quad ただし \quad f_0(i)=0 とする。$$

（証明）状態$i$から出発し最初に$i$に戻る時刻で場合分けをする。

$$P^{(n)}(i,i)=P(X_n=i|X_0=i)=\sum_{k=1}^{n} P(X_n=i,T^*(i)=k|X_0=i)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} P(X_n=i|T^*(i)=k,\ X_0=i)P(T^*(i)=k|X_0=i)=\sum_{k=1}^{n} P_{n-k}(i,i)f_k(i)$$

$f_0(i)=0$より定理の主張が成り立つ。

次の母関数を考える。

$$\mathrm{P}(s;i,i)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(i,i)s^n\ ,\quad \mathrm{G}(s;i)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(i)s^n \qquad (0\leq s\leq 1)。$$

$$\mathrm{G}(s;i)\,\mathrm{P}(s;i,i)=(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(i)s^n)(\sum_{n=0}^{\infty} P_n(i,i)s^n)=\sum_{n=0}^{\infty}\{\sum_{k=0}^{n} f_k(i)P_{n-k}(i,i)\}\}s^n$$

$f_0(i)=0$に注意すると補助定理７より、

$$=\sum_{n=1}^{\infty} P_n(i,i)s^n=\ \mathrm{P}(s;i,i)-P_0(i,i)=\ \mathrm{P}(s;i,i)-1$$

ゆえに　$\mathrm{P}(s;i,i)=1/\{1-\ \mathrm{G}(s;i)\}$ $\qquad 0\leq s\leq 1$

<u>**補助定理 F２**</u>　（アーベルの正項級数に関する定理）

すべての　$k\geq 0$に対して$a_k\geq 0$とする。このとき

$\lim_{s\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k=\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が成り立つ。ただし、両辺が同時に無限大も含む。

（証明）

$0\leq s\leq 1$、自然数nに対して$\sum_{k=0}^{n} a_k s^k\leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k\leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k$、

$s\to 1-0$　として$\sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$はsに関して単調なので、極限$\lim_{s\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$が存在し

$\sum_{k=0}^{n} a_k\leq \lim_{s\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k\leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k$。これが任意のnについて成り立つので$n\to\infty$として

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\leq \lim_{s\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k\leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k$　よって等式が成り立つ。

<u>**定理 F３**</u>

状態$i$　が再帰的であるための必要十分条件は$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(i,i)=\infty$が成り立つことである。

（証明）状態$i$が再帰的のとき、補助定理８より $\lim_{s\to 1-0} \mathrm{G}(s;i) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(i) = 1$、故に母関数の関係式より $\lim_{s\to 1-0} \mathrm{P}(s;i,i) = \lim_{s\to 1-0} 1/\{1- \mathrm{G}(s;i)\} = \infty$。再び補助定理８より

$\lim_{s\to 1-0} \mathrm{P}(s;i,i) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(i,i) = \infty$ が得られる。逆に、状態 i が過渡的なとき、

$\lim_{s\to 1-0} \mathrm{G}(s;i) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(i) < 1$、ゆえに $\lim_{s\to 1-0} \mathrm{P}(s;i,i) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(i,i) < \infty$ となる。

$\Delta_i(X_n) = \begin{cases} 1 & (X_n = i) \\ 0 & (X_n \neq i) \end{cases}$ とすると $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_i(X_k)$ は状態$i$への滞在時間。

期待値$E[\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_i(X_k) | X_0 = i] = \sum_{k=1}^{\infty} E[\Delta_i(X_k) | X_0 = i] = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(i,i)$ より状態$i$の平均滞在時間が有限ならば過渡的、無限ならば再帰的である。

**例**

(1)　１次元ランダムウオーク　$S = \{.....,-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3,......\}$

推移確率：$P(k,k+1) = p,\ P(k,k-1) = q,\quad p+q=1$　とする。

原点から出発し原点に戻ってくる確率を考える。このとき、右及び左へ移動する回数は等しいので、移動の総ステップ数は偶数。すなわち$P_{2n+1}(0,0) = 0$、　よって$2n$ステップで原点へ戻ってくる確率は　$P_{2n}(0,0) = {}_{2n}C_n p^n q^n = \frac{(2n)!}{n!n!}(pq)^n$。スターリングの公式より

$n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} \exp(-n)$　（～は比が１に近づくことを示す）。これより、

$P_{2n}(0,0) \sim \frac{\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+\frac{1}{2}} \exp(-2n)}{\{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} \exp(-n)\}^2}(pq)^n = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$、　ここで$4pq = 4p(1-p) \le 1$

（等号は$p = \frac{1}{2}$のとき）、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$ より $p = q = \frac{1}{2}$のとき再帰的（recurrent）、$p \neq \frac{1}{2}$のとき過渡的(transient)である。

（参考）$p \neq \frac{1}{2}$のとき、少なくとも１回原点に復帰する確率は$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(0,0) = 1 - |p-q|$。

(2)　２次元の対称なランダムウオーク

原点$O(0,0)$から出発し、原点に戻ってくるためには、左及び右へ移動する回数、ならびに上及び下へ移動する回数はそれぞれ等しい。従って、$P_{2n+1}(O,O) = 0$である。

左右にそれぞれ r 回、上下にそれぞれ s 回移動すると $2n$ 回
で原点に戻ってくるためには、$2r+2s=2n$　すなわち
$r+s=n$。$2n$ 回目に原点に戻る確率は、多項分布で表される

$$P_{2n}(O,O)=\sum_{r+s=n}\frac{(2n)!}{(r!)^2(s!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}=\sum_{r=0}^{n}\left\{\frac{n!}{(n-r)!r!}\right\}^2\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}=\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}({}_{2n}C_n)^2$$

スターリングの公式より、$P_{2n}(O,O)\sim\dfrac{1}{\pi n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$　より再帰的である。

(3)　３次元の対称ランダムウオーク

　同様にして、３次元格子空間上の対称なランダムウオークについて、原点 $O(0,0,0)$ から出発し原点へ戻る確率は $P_{2n}(O,O)\sim O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}<\infty$　より、過渡的 (transient) である。

平均再帰時間：$E[T^*(i)]=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n f_n(i)$　　このとき、状態 $i$ は次のように分類される。

$$\text{再帰的}\begin{cases}\text{正再帰}(\textit{positive recurrent})\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}f_k(i)=1,\ E[T^*(i)]<\infty\\ \text{零再帰}(\textit{null recurrent})\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}f_k(i)=1,\ E[T^*(i)]=\infty\end{cases}$$

過渡的(transient)　$\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}f_k(i)\ <1$

**定理 F４**

　マルコフ連鎖が既約とする。このマルコフ連鎖が定常分布 $\Pi$ を持つための必要十分条件は、全ての状態が正再帰的であることである。そのとき、定常分布 $\Pi=(\pi_k;k\in S)$ は

$\pi_k=\dfrac{1}{E[T^*(k)|X_0=k]}$　（平均再帰時間の逆数）で与えられる。

(G) ラプラス変換

　$f(t)$ を $0<t<\infty$ で定義された実変数 t の関数とする。複素数 s に対して積分 $F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt$ が存在するとき、s を変数とする関数 $F(s)$ を $f(t)$ のラプラス変換と言う。$F(s)=L\{f(t)\}$ と表わすことにする。$f(t)$ を $F(s)$ の原関数、$F(s)$ を $f(t)$ の像関数とも呼ぶ。

<例>　①$L\{e^{at}\}=\dfrac{1}{s-a}$　　ただし、s の実部＞a

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\times e^{at}dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt \text{（Re}al(s)>a\text{ のとき可積分）}=\left[\frac{e^{-(s-a)t}}{a-s}\right]_0^\infty=\frac{1}{s-a}$$

②$L\{t^n\}=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}t^n dt=\int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)\times t^n dt=\left[\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)t^n\right]_0^\infty+\int_0^\infty\left(\frac{e^{-st}}{s}\right)\times nt^{n-1}dt$$
$$=\frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^{n-1}dt=\cdots=\frac{n!}{s^n}\int_0^\infty e^{-st}dt=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

○ ラプラス積分可能であるための十分条件：

ある実数ａに対して、$T$を十分大きく取ると、全ての$t>T$に対して$|f(t)|<Me^{at}$を満たすとき、$\left|\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt\right|\le\int_T^\infty\left|e^{-st}f(t)\right|dt\le M\int_0^\infty \exp\{-(\mathrm{Re}al(s)-a)t\}dt$となり、$\mathrm{Re}al(s)>a$となる複素数ｓに対して積分は存在する。この条件を満たす関数を指数型関数と言う。

○ラプラス変換の性質

（1） 線形性：$L\{af(t)+bg(t)\}=aL\{f(t)\}+bL\{G(t)\}$

$$(\because)L\{af(t)+bg(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\{af(t)+bg(t)\}dt=a\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt+b\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt$$
$$=aL\{f(t)\}+bL\{G(t)\}$$

（2） 像関数の移動： $L\{f(t)\}=F(s)$ならば$L\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$

$(\because)\mathrm{Re}al(s)>a$ のとき、$L\{e^{at}f(t)\}=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt=F(s-a)$

＜例＞ $L\{t^n\}=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ より $L\{e^{at}t^n\}=\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

（3） 導関数の変換：

$f(t)$が指数型関数で$L\{f(t)\}=F(s)$ならば$L\{\frac{d}{dt}f(t)\}=sF(s)-f(+0)$

$$(\because)L\{\frac{d}{dt}f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{d}{dt}f(t)\right)dt=\left[e^{-st}f(t)\right]_0^\infty-(-s)\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$
$$=sF(s)-f(+0)$$

○逆変換の一意性

原関数$f(t)$の像関数が$F(s)$のとき、同じ$F(s)$を像関数にもつ原関数は$f(t)$の他には

ない。すなわち、原関数と像関数は１対１に対応する。$F(s)$ に $f(t)$ を対応させることを逆ラプラス変換と言い $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ と表わす。

＜例＞　$L^{-1}\left(\dfrac{1}{s-a}\right) = e^{at}$　、　$L^{-1}\left(\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right) = t^n$、　$L^{-1}\left(\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right) = t^n e^{at}$　など

**(H)条件付き確率と条件付き期待値**

確率空間 $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ の有限分割 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ $\left(\bigcup_{i=1}^{r} A_i = \Omega,\ A_i \cap A_j = \phi (i \neq j)\right)$ の場合について、条件付き確率、条件付き期待値を導入し、一般の場合に拡張する。

１．条件付き確率

（１）有限部分集合体の場合

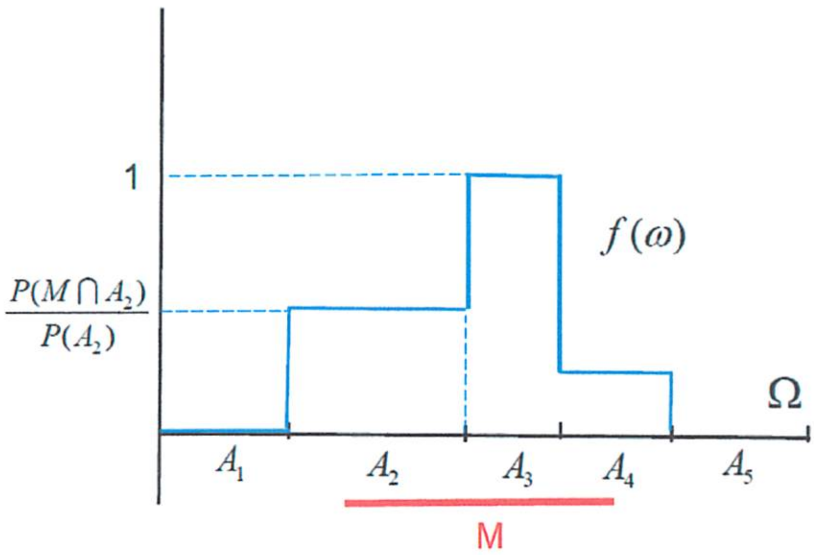
・$P(A) \neq 0 \Rightarrow$ 条件付き確率　$P(M|A) = \dfrac{P(M \cap A)}{P(A)}$

空間 $\Omega$ 上の $\sigma$ 集合体 $\mathfrak{I}$ の有限部分集合体 $\aleph$ の最小単位を $A_1, \cdots, A_r$ とする。すなわち、$\aleph$ の要素は $A_1, \cdots, A_r$ の部分和から成っている。任意の $M \in \aleph$ に対して、$\omega \in A_i$ のとき

$f(\omega) = P(M|A_i) = \dfrac{P(M \cap A_i)}{P(A_i)}$ という階段関数を

考える。すなわち、$f(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{P(M \cap A_i)}{P(A_i)} I_{A_i}(\omega)$ ，($I_{A_i}(\omega)$ は定義関数)。

この関数 $f(\omega)$ を有限集合体 $\aleph$ に関する M の条件付き確率と言い $f(\omega) = P(M \| \aleph)$ と表す。




（２）　一般の場合

$\mathfrak{R}$ を $\mathfrak{I}$ の部分 $\sigma$ 集合体 $(\mathfrak{R} \subset \mathfrak{I})$ とする。$\mathfrak{R}$ 上の可算加法的集合関数 $\Phi$ を $\Phi(G) = P(M \cap G)$ $(G \in \mathfrak{R})$ で定義する。$\Phi$ は確率測度 P の $\mathfrak{R}$ への制限に関して絶対連続、

すなわち、$P(G)=0 \to \Phi(G)=0$。このとき、Radon-Nikodym の定理より $\mathfrak{R}-$ 可測な可積分関数 $f(\omega)$ が存在して、$\Phi(G)=\int_G f(\omega)dP$ が成り立つ。$f=P(M\|\mathfrak{R})$ で表し、$\sigma$ 集合体 $\mathfrak{R}$ に関する M の条件付き確率と言う。

有限分割の時は $f(\omega)=\sum_{i=1}^{r}\frac{P(M\cap A_i)}{P(A_i)}I_{A_i}(\omega)$ ，($I_{A_i}(\omega)$ は定義関数)となるが

$$\Phi(A_k)=\int_{A_k}\sum_{i=1}^{r}\frac{P(M\cap A_i)}{P(A_i)}I_{A_i}(\omega)\,dP=\sum_{i=1}^{r}\frac{P(M\cap A_i)}{P(A_i)}\int_{A_k}I_{A_i}(\omega)dP$$
$$=\sum_{i=1}^{r}\frac{P(M\cap A_i)}{P(A_i)}\times P(A_i\cap A_k)=P(M\cap A_k)$$

より、$f(\omega)$ は一般の条件付き確率の定義を満たすことが分かる。

## 2．条件付き期待値

### （1）有限集合族の場合

確率変数 $X:\Omega\to R$ があるとき、事象 $\{\omega: X(\omega)\in A\}, A\subset R$ という条件下で確率変数 $X$ の条件付き期待値は $E[X|A]=\frac{1}{P(A)}\int_A XdP$ で定義される。空間 $\Omega$ の有限分割 $A_1,A_2,\cdots,A_r$ から生成される有限集合族 $\aleph$ について、各 $A_i$ について条件付き期待値が定義できる。

$$E[X|A_i]=\frac{1}{P(A_i)}\int_{A_i}XdP=\frac{1}{P(A_i)}\int_{\Omega}XI_{A_i}(\omega)dP$$

$\omega\in A_i$ のとき、値 $E[X|A_i]$ をとる $\Omega$ 上の階段関数 $g(\omega)$ を $g(\omega)=\sum_{i=1}^{r}E[X|A_i]I_{A_i}(\omega)$ で定義する。$g(\omega)$ を確率変数 $X$ の有限集合族 $\aleph$ に関する条件付き期待値と呼び、$g(\omega)=E[X|\aleph]$ で表す。条件付き期待値 $g(\omega)=E[X|\aleph]$ は $\aleph-$ 可測である。

$g(\omega)$ の期待値を取ると確率変数 $X$ の期待値に等しい。なぜなら、

$$E[g(\omega)]=\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{r}E[X|A_i]I_{A_i}(\omega)dP=\sum_{i=1}^{r}E[X|A_i]\int_{\Omega}I_{A_i}(\omega)dP=\sum_{i=1}^{r}E[X|A_i]P(A_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{r}\int_{A_i}XdP=\int_{\Omega}XdP=E[X]$$

$\Omega$ 上の２つの有限集合族 $\aleph_1,\aleph_2$ について、$\aleph_2$ は $\aleph_1$ の細分とする。すなわち、$\aleph_1$ の任意の要素 $A\in\aleph_1$ は $\aleph_2$ の要素の和集合 $A=\bigcup_{j=1}^{\ell}B_j,\ B_j\in\aleph_2$ で表される。このとき $\aleph_1\subset\aleph_2$ で表す。

確率変数 $X$ の有限集合族 $\aleph_1,\aleph_2$ に関する条件付き期待値を $g(\omega)=E[X|\aleph_1]$，

$h(\omega)=E[X|\aleph_2]$で表す。$h(\omega)=\sum_{j=1}^{n}E[X|B_j]I_{B_j}(\omega)$として、$h(\omega)$の有限集合族$\aleph_1$に関する条件付き期待値を求めよう。$A=\bigcup_{l=1}^{m}B_{k_l}\in\aleph_1$, $B_{k_l}\in\aleph_2$とするとき、

$$
\begin{aligned}
E[h(\omega)|A]&=\frac{1}{P(A)}\int_A\sum_{j=1}^{n}E[X|B_j]I_{B_j}(\omega)dP=\frac{1}{P(A)}\sum_{j=1}^{n}E[X|B_j]\int_A I_{B_j}(\omega)dP\\
&=\frac{1}{P(A)}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{P(B_j)}\int_\Omega XI_{B_j}(\omega)dP\right)P(A\cap B_j)\\
&=\frac{1}{P(A)}\int_\Omega X\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{P(A\cap B_j)}{P(B_j)}I_{B_j}(\omega)\right)dP=\frac{1}{P(A)}\int_\Omega XI_A(\omega)dP=E[X|A] \qquad (H.1)
\end{aligned}
$$

任意の$A\in\aleph_1$について成り立つので、$E\left[E\left[X|\aleph_2\right]\aleph_1\right]=E\left[X|\aleph_1\right]$が成り立つ。

特に$X=I_M(\omega)$のとき、$E[X|\aleph]=P(X|\aleph)$が成り立つ、なぜなら

$$
\begin{aligned}
E[X|\aleph]&=\sum_{l=1}^{r}E[I_M(\omega)|A_l]I_{A_l}(\omega)=\sum_{l=1}^{r}\frac{1}{P(A_l)}\left(\int_\Omega I_M(\omega)I_{A_l}(\omega)dP\right)I_{A_l}(\omega)\\
&=\sum_{l=1}^{r}\frac{P(A_l\cap M)}{P(A_l)}I_{A_l}(\omega)=P(M|\aleph)
\end{aligned}
$$

（2）一般の場合

$\mathfrak{R}:\mathfrak{I}$の部分$\sigma-$集合族　($\mathfrak{R}\subset\mathfrak{I}$)、$X(\omega)$ : $(\Omega,\mathfrak{I},P)$上の確率変数とする。

部分$\sigma-$集合族$\mathfrak{R}$に関する条件付き期待値$E[X|\mathfrak{R}]$は、任意の$B\in\mathfrak{R}$に対して、$\int_B XdP=\int_B E[X|\mathfrak{R}]dP$を満たす$\mathfrak{R}-$可測な関数として定義される。これは有限集合族の場合の(H.1)の拡張となっている。このような$\mathfrak{R}-$可測な関数$E[X|\mathfrak{R}]$の存在はRadon-Nikodymの定理により証明される。

３．マルチンゲール

確率過程$\{X_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$が$E[X_{n+1}|X_0,X_1,\cdots,X_n]=X_n$を満たすとき、マルチンゲールであるという。また、$E[X_{n+1}|X_0,X_1,\cdots,X_n]\ge X_n$ $\left(E[X_{n+1}|X_0,X_1,\cdots,X_n]\le X_n\right)$のとき劣マルチンゲール（優マルチンゲール）という。

**(I) マルコフ時刻と強マルコフ性**

$(\Omega, F, P)$、すなわち空間Ω上のσ-fieldFと確率測度Pの三つ組みを確率空間と呼ぶ。確率過程$X_t$に対して、次の条件(1),(2),(3)を満たすような増大するσ-field$F_t$ $(t \in T)$を考える。

(1) $t < s$のとき$F_t \subset F_s \subset F$　　(2) $\bigcap_{s>t} F_s = F_t$（右連続性）

(3) $X_t$は$F_t$可測である。（$X_t$は$F_t$に適合していると言う）

例えば離散時間の場合は、マルコフ連鎖$X_t\ (t = 0,1,2,\ldots)$に対して、時刻nまでに起きた全ての事象$(X_0, X_1, \cdots X_n)$によって生成されたσ-fieldを$F_n$と置けばよい。

<u>定義</u>：Ω上の確率変数$\tau$が任意の$t \in T$に対して、$\{\omega; \tau(\omega) \le t\} \in F_t$を満たすとき$\tau$をマルコフ時刻（停止時刻）という。

＜例＞　$X_n\ (n = 0,1,2,\cdots)$をσ-field　$F_n$に適合した実数値マルコフ連鎖とする。区間Iに対して

$$\tau_I(\omega) = \begin{cases} \inf(n; X_n \in I), & \omega \in \bigcup_n \{X_n \in I\} \text{のとき} \\ +\infty, & \omega \notin \bigcup_n \{X_n \in I\} \text{のとき} \end{cases}$$

とすると、$\tau_I$は停止時刻である。　なぜなら$\{\tau_I \le n\} = \bigcup_{m \le n} \{X_m \in I\} \in F_n$。

<u>定義</u>：$\tau$がマルコフ時刻のとき、

$F_\tau = \{A \in F;\ {}^\forall t \in T,\ A \cap \{\tau(\omega) \le t\} \in F_t\}$とすると$F_\tau$は$F$の部分σ-fieldである。

$\tau(\omega) \equiv t$のとき$F_\tau = F_t$である。

<u>定義</u>：強マルコフ性

$X_t$　$([0,\infty) \in t)$はd次元の確率過程とする。$X_t$が次の条件を満たすとき強マルコフ性を持つという。$\mathfrak{R}$をd次元ユークリッド空間のボレル集合族とする。

任意の停止時刻$\sigma$と任意の$\Gamma \in \mathfrak{R}$に対して、$P(X_{\sigma+t} \in \Gamma | F_\sigma) = P(X_{\sigma+t} \in \Gamma | X_\sigma)$

$\sigma(\omega) \equiv s$のときは$P(X_{s+t} \in \Gamma | F_s) = P(X_{s+t} \in \Gamma | X_s)$となり、通常のマルコフ性となる。

**(J) ファインマン・カッツの公式**

マルコフ過程$X_t$の生成作用素がAのとき、方程式$(\lambda - A + v(x))u(x) = f(x)$の解は$u(x) = E_x\left[\int_0^\infty \exp\left(-\lambda t - \int_0^t v(X_s)ds\right)f(X_t)dt\right]$で与えられるというのが、ファインマン・カッツの公式である。ここでは、連続時間マルコフ連鎖について、この式を証明する。

状態空間$S = \{\alpha, \beta, \gamma, \cdots\}$の上の連続時間マルコフ連鎖を$X_t$とし、その生成作用素をAとする。すなわち遷移確率を$P_t(\alpha, \beta) = P(X_t = \beta | X_0 = \alpha)$とすると、

$\frac{d}{dt}P_t(\alpha, \gamma) = \sum_{\beta \in S} A_{\alpha,\beta}P_t(\beta, \gamma)$（コルモゴロフ後ろ向き方程式）が成り立つ。

ただし$A_{\alpha,\beta} \geq 0\ (\alpha \neq \beta)$, $A_{\alpha,\alpha} = -\sum_{\beta \neq \alpha} A_{\alpha,\beta}$。

<u>**定理 I 1**</u>

方程式：$(\lambda - A + v(\alpha))u(\alpha) = f(\alpha)$, すなわち$(\lambda + v(\alpha))u(\alpha) - \sum_{\beta \in S} A_{\alpha,\beta}u(\beta) = f(\alpha)$

の解は$u(\alpha) = E_\alpha\left[\int_0^\infty \exp\left(-\lambda t - \int_0^t v(X_s)ds\right)f(X_t)dt\right]$で与えられる。

（証明）

初期条件$X_0 = \alpha$の連続時間マルコフ連鎖$X_t$の最初のジャンプ時間を$\sigma$とすると、

指数分布$P(\sigma > t) = \exp\left(-|A_{\alpha,\alpha}|t\right)$に従う。$\sigma$の分布密度は$|A_{\alpha,\alpha}|\exp\left(-|A_{\alpha,\alpha}|t\right)$である。

状態αに$\sigma$だけ滞在した後、確率$\frac{A_{\alpha,\beta}}{|A_{\alpha,\alpha}|}$で別の状態$\beta(\neq \alpha)$へ移る。以上のことから積分を

$[0,\sigma]$と$[\sigma,\infty)$に分けて行うと、

$$u(\alpha) = E_\alpha\left[\int_0^\sigma \exp\left(-\lambda t - \int_0^t v(X_s)ds\right)f(X_t)dt\right] + E_\alpha\left[\int_\sigma^\infty \exp\left(-\lambda t - \int_0^t v(X_s)ds\right)f(X_t)dt\right]$$

$$\begin{aligned}
\text{第1項} &= E_\alpha\left[\int_0^\sigma \exp\left(-\lambda t - \int_0^t v(X_s)ds\right)f(X_t)dt\right] \\
&= \left\{\int_0^\infty f(\alpha)\{\int_0^u \exp\left(-\lambda t - v(\alpha)t\right)dt\} \times |A_{\alpha,\alpha}|\exp\left(-|A_{\alpha,\alpha}|u\right)du\right\} \\
&= f(\alpha)|A_{\alpha,\alpha}|\int_0^\infty \left\{\frac{1-\exp\left(-(\lambda + v(\alpha))u\right)}{\lambda + v(\alpha)}\right\}\exp\left(-|A_{\alpha,\alpha}|u\right)du \\
&= \frac{f(\alpha)}{(\lambda + v(\alpha) + |A_{\alpha,\alpha}|)}
\end{aligned}$$

$$第2項 = E_\alpha\left[\int_\sigma^\infty \exp\left(-\lambda t - \int_0^t v(X_s)ds\right)f(X_t)dt\right]$$
$$= E_\alpha\left[E\left[\int_0^\infty \exp\left(-\lambda t - \int_0^t v(X_s)ds\right)f(X_t)dt \middle| F_\sigma\right]\right]$$
$$= E_\alpha\left[\exp\left(-\int_0^\sigma v(X_s)ds\right)E\left[\int_0^\infty \exp\left(-\lambda t - \int_\sigma^t v(X_s)ds\right)f(X_t)dt \middle| F_\sigma\right]\right]$$

変数変換$s = \sigma + x,\ t = \sigma + y$とすると、強マルコフ性より

$$= E_\alpha\left[\exp(-v(\alpha)\sigma)E\left[\int_0^\infty \exp\left(-\lambda(\sigma+y) - \int_0^y v(X_{\sigma+x})dx\right)f(X_{\sigma+y})dy \middle| F_\sigma\right]\right]$$
$$= E_\alpha\left[\exp(-(v(\alpha)+\lambda)\sigma)E_{X_\sigma}\left[\int_0^\infty \exp\left(-\lambda y - \int_0^y v(X_x)dx\right)f(X_y)dy\right]\right]$$

$$= E_\alpha[\exp(-(v(\alpha)+\lambda)\sigma)u(X_\sigma)] = E_\alpha[\exp(-(v(\alpha)+\lambda)\sigma)]\left(\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{A_{\alpha,\beta}}{|A_{\alpha,\alpha}|}u(\beta)\right)$$
$$= \left\{\int_0^\infty \exp(-(v(\alpha)+\lambda)t)\times|A_{\alpha,\alpha}|\exp(-|A_{\alpha,\alpha}|t)dt\right\}\left(\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{A_{\alpha,\beta}}{|A_{\alpha,\alpha}|}u(\beta)\right)$$
$$= \left(\sum_{\beta\neq\alpha}A_{\alpha,\beta}u(\beta)\right)\Big/\left(v(\alpha)+\lambda+|A_{\alpha,\alpha}|\right)$$

以上より　$u(\alpha) = \dfrac{1}{(v(\alpha)+\lambda+|A_{\alpha,\alpha}|)}\left\{f(\alpha)+\sum_{\beta\neq\alpha}A_{\alpha,\beta}u(\beta)\right\}$、整理すると

$(\lambda+v(\alpha))u(\alpha) - \sum_{\beta\in S}A_{\alpha,\beta}u(\beta) = f(\alpha)$を得る。

また、微分方程式$\dfrac{d}{dt}u_t(x) = Au_t(x) - v(x)u_t(x),\ \ u_0(x) = f(x)$の解$u_t(x)$は

そのラプラス変換を$U(x,\lambda) = \int_0^\infty \exp(-\lambda t)u_t(x)dt$とすると

$\lambda U(x,\lambda) - f(x) = AU(x,\lambda) - v(x)U(x,\lambda)$を満たす。すなわち、

$(\lambda - A + v(x))U(x,\lambda) = f(x)$なので、$U(x,\lambda) = E_x\left[\int_0^\infty \exp\left(-\lambda t - \int_0^t v(X_s)ds\right)f(X_t)dt\right]$

で与えられる。これより、$u_t(x) = E_x\left[\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t v(X_s)ds\right)f(X_t)dt\right]$となる。