Ｆ分布　と　ｔ分布

「Ｆ分布」: χ_1^2,χ_2^2 が独立で、それぞれ自由度 n_1 , n_2 のカイ自乗分布に従うとき、$F=\dfrac{\chi_1^2/n_1}{\chi_2^2/n_2}$ は自由度 n_1,n_2 なるＦ分布に従う。

（証明）$\chi_1^2=y,\ \chi_2^2=z$ とすると、独立なので (y,z) の同時確率分布密度は

$$f(y,z)=\frac{1}{4\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})}\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n_1}{2}-1}\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{n_2}{2}-1}\exp\{-\frac{1}{2}(y+z)\},\quad (y\ge 0,z\ge 0)$$

故に $x=\dfrac{y/n_1}{z/n_2}=\dfrac{n_2y}{n_1z}$ の確率分布密度を $g(x)$ とすると、$x=\dfrac{n_2y}{n_1z},\ z=z$ と置いて変数を (y,z) から (x,z) に変換し、ｚについて積分する。逆変換は $y=\dfrac{n_1}{n_2}xz,\ z=z$ なので、

ヤコビアンは $J=\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(x,z)}=\begin{vmatrix}\partial y/\partial x & \partial y/\partial z\\ \partial z/\partial x & \partial z/\partial z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{n_1}{n_2}z & \frac{n_1}{n_2}x\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\dfrac{n_1}{n_2}z$、　これより、

$$g(x)=\int_0^\infty \frac{1}{4\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})}\left(\frac{n_1xz}{2n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}-1}\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{n_2}{2}-1}\exp\{-\frac{1}{2}(\frac{n_1}{n_2}x+1)z\}\left(\frac{n_1z}{n_2}\right)dz$$

$\dfrac{1}{2}(\dfrac{n_1}{n_2}x+1)z=w$ と積分の変数をｚからｗへ変換すると、$dz=\dfrac{2n_2dw}{(n_1x+n_2)}$ より

$$g(x)=\int_0^\infty \frac{1}{4\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})}\left(\frac{n_1xw}{n_1x+n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}-1}\left(\frac{n_2w}{n_1x+n_2}\right)^{\frac{n_2}{2}-1}e^{-w}\frac{n_1}{n_2}\left(\frac{4n_2^2w}{(n_1x+n_2)^2}\right)dw$$

$$=\frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\times\frac{(n_1x)^{\frac{n_1}{2}-1}n_2^{\frac{n_2}{2}-1}}{(n_1x+n_2)^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)}}\int_0^\infty w^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)-1}e^{-w}dw$$

$$g(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}x^{\frac{n_1}{2}-1}(1+\frac{n_1}{n_2}x)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}=\frac{n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}}{B(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2})}\times\frac{x^{(n_1-2)/2}}{(n_1x+n_2)^{(n_1+n_2)/2}}\qquad (x\ge 0)$$

「ｔ分布」　Ｘが N(0,1)、Ｙが自由度ｎのカイ自乗分布に従い、独立なとき $t=X\Big/\sqrt{\dfrac{Y}{n}}$ は

自由度ｎのｔ分布に従う。

（証明）

Ｙ の確率分布密度 $g(y)$ は $g(y)=\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}$ より $Z=\sqrt{Y/n}$ の確率分布密度 $h(z)$ は

$$h(z)=g(nz^2)\frac{dy}{dz}=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(nz^2)^{\frac{n}{2}-1}\exp(-\frac{nz^2}{2})\times 2nz\ =\frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}z^{n-1}\exp(-\frac{nz^2}{2})$$

(X,Z) の同時確率分布密度を $f(x,z)$ とすると、ＸとＺが独立より

$$f(x,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})\times\frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}z^{n-1}\exp(-\frac{n}{2}z^2)$$

$t=\dfrac{x}{z},\ z=z$ として変数を (x,z) から (t,z) に変換する。逆変換は $x=tz,\ z=z$ より

ヤコビアンは $J=\dfrac{\partial(x,z)}{\partial(t,z)}=\begin{vmatrix}\partial x/\partial t & \partial x/\partial z\\ \partial z/\partial t & \partial z/\partial z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}z & t\\ 0 & 1\end{vmatrix}=z$

ｔの確率分布密度を $f(t)$ とすると

$$f(t)=\int_0^\infty f(tz,z)\times zdz=\int_0^\infty\frac{n^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\exp(-\frac{t^2z^2}{2})z^{n-1}\exp(-\frac{n}{2}z^2)zdz$$

故に　$f(t)=\dfrac{n^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty z^n \exp\left\{-\left(\dfrac{n+t^2}{2}\right)z^2\right\}dz$

$\left(\dfrac{n+t^2}{2}\right)z^2=x$ とすると、$dx=(n+t^2)zdz,\quad z=\sqrt{\dfrac{2x}{n+t^2}}$ より

$$f(t)=\frac{n^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty\left(\frac{2x}{n+t^2}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-x}\times\frac{1}{(n+t^2)}\sqrt{\frac{n+t^2}{2x}}dx$$

$$=\frac{n^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})(n+t^2)^{(n+1)/2}}\int_0^\infty x^{\frac{n-1}{2}}e^{-x}dx=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

これより、$f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{n}B(\frac{n}{2},\frac{1}{2})}(1+\dfrac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$

○　確率変数の変換

$y=\phi(x)$ をｘの単調増加または単調減少関数とする。その逆関数を $x=\psi(y)$ とする。

確率分布密度関数が $f(x)$ である確率変数Ｘの関数 $Y=\phi(X)$ の確率分布密度関数 $g(y)$ は

$g(y)=f(\psi(y))\dfrac{dx}{dy}$ で与えられる。

（証明）いずれの場合も同様なので $y=\phi(x)$ は単調増加とする。区間｛$y\le Y\le y+\Delta y$｝の逆像を $\psi(y\le Y\le y+\Delta y)=\{x\le X\le x+\Delta x\}$ とするとＸとＹは１対１に対応するので

$P(y\le Y\le y+\Delta y)=P(x\le X\le x+\Delta x)$ 、$\Delta x,\Delta y$ を非常に小さくとると

$P(y\le Y\le y+\Delta y)=g(y)\Delta y+o(\Delta y),\quad P(x\le X\le x+\Delta x)=f(x)\Delta x+o(\Delta x)$

故に　$g(y)\Delta y+o(\Delta y)=f(x)\Delta x+o(\Delta x)$

$g(y)=f(x)\dfrac{\Delta x}{\Delta y}+o(\dfrac{\Delta x}{\Delta y})-o(1)$　　　$\Delta y\to 0$ のとき $o(\dfrac{\Delta x}{\Delta y})-o(1)\to 0$ なので

$g(y)=f(x)\dfrac{dx}{dy}=f(\psi(y))\dfrac{d\psi(y)}{dy}$

○ヤコビアン、二重積分の置換積分

行列式：$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$ 、$|ad-bc|$ ＝ベクトル $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ を二辺とする平行四辺形の面積

$x=x(u,v), y=y(u,v)$ ：(u,v) 平面上の点 (u,v) に (x,y) 平面上の点 (u,v) を対応させる写像。

(x,y) の (u,v) に関するヤコビアン：$J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}$

定理１：(u,v) 平面上の３点 $P(a,b),Q(a+\Delta u,b),R(a,b+\Delta v)$ が写像 $x=x(u,v),y=y(u,v)$ で移る (x,y) 上の点を P',Q',R' とし、$P'Q',P'R'$ を二辺とする平行四辺形の面積をＳとすると

$S=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(a,b)\right|\Delta u\Delta v+o(\Delta u\Delta v)$　　$(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\to 0$ のとき）

（証明）

$P'(x(a,b),y(a,b)),Q'(x(a+\Delta u,b),y(a+\Delta u,b)),R'(x(a,b+\Delta v),y(a,b+\Delta v))$ なので

$\overrightarrow{P'Q'}=(x(a+\Delta u,b)-x(a,b),y(a+\Delta u,b)-y(a,b))=(x_u(a,b)\Delta u+o(\Delta u),y_u(a,b)\Delta u+o(\Delta u))$

$\overrightarrow{P'R'}=(x(a,b+\Delta v)-x(a,b),y(a,b+\Delta v)-y(a,b))=(x_v(a,b)\Delta v+o(\Delta v),y_v(a,b)\Delta v+o(\Delta v))$

これより、$P'Q',P'R'$ を二辺とする平行四辺形の面積Ｓは容易に求められる。

定理２.：(u,v) 平面から (x,y) への写像 $x=x(u,v),y=y(u,v)$ によって領域Ｋは領域Ｄに１対１に移るものとする。このとき $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ne 0\ ((u,v)\in K)$ ならば、Ｄ上の連続関数 $f(x,y)$ に対して $\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_K f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv$　が成り立つ。

（例）一次変換 $x=au+bv,\ y=cu+dv$ によって (u,v) 平面上の４点 $(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$ は (x,y) 平面上の４点 $(0,0),(a,c),(b,d),(a+b,c+d)$ に移る。この平行四辺形の面積は $|J|=|ad-bc|$ で与えられる。この面積拡大率がヤコビアン $dxdy=|J|dudv$ である。