一般固有値問題から学ぶ線形代数

線形代数学において、線形空間、基底、行列の固有値問題から、さらに一般固有値問題、ジョルダンの標準形まで講義をすすめることは難しく、理科系教養の講義でも線形代数の一部の紹介で終わってしまうことが多い。そこで、逆に一般固有空間、ジョルダンの標準形を学び、その特別な場合として、エルミート行列、ユニタリー行列、対称行列、直交行列などのスペクトル分解へという方法も考えられる。一般固有空間とその上の適当な基底での表現行列としてジョルダン標準形を修得すると、上記の行列の固有値問題がその特殊な場合として見通しよく理解できる。以上のような試みとして、笠原皓司著「線形代数と固有値問題」（現代数学社）を参考テキストとして、上記のような流れで線形代数学の内容を再構成してみたものである。ただし線形空間、基底などの基礎的事項は付録を参照していただきたい。

目　次

§１．一般固有値問題

E 上の線形変換：φ

$\varphi(x)=\lambda x \quad (x\neq 0)$　を満たす x を固有ベクトル、λ を固有値という。

λ が固有値 $\Leftrightarrow \lambda$ は $\det(A-\lambda I)=0$ (固有方程式)の解である。

φ の異なる固有値：$\lambda_1,\lambda_2,....,\lambda_r$　　（係数体：複素数体）

＊固有空間　$F_i=\{x;\ (\varphi-\lambda_i I)x=0\} \quad i=1,2,...,r$

＊一般固有空間　$G_i=\{x\ ;$ ある非負整数 k があって $(\varphi-\lambda_i I)^k x=0\} \quad i=1,2,...,r$

G_i は線形部分空間で $G_i \supseteq F_i$

定理１． 任意の線形変換 φ

$E = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_r$ （直和）; 各 G_i に対しある自然数 k_i が定まって

$G_i = \{x;\ (\varphi - \lambda_i I)^{k_i}(x) = 0\}$　かつ　$(\varphi - \lambda_i I)^{k_i - 1} x \neq 0$ となる x が G_i に存在する。

k_i を固有値 λ_i の標数という。

＜証明＞

①　$\varphi - \lambda_i I = \varphi_i \ \ (i = 1, 2, .., r)$ とする。$E \supseteq \varphi_i(E) \supseteq {\varphi_i}^2(E) \supseteq {\varphi_i}^3(E) \supseteq \cdots$

Ｅは有限次元なので　${\varphi_i}^{k-1}(E) \supset {\varphi_i}^{k}(E) = {\varphi_i}^{k+1}(E) = \cdots$　となる k が存在する。

このようなｋの最小値を k_i とし、固有値 λ_i の標数という。${\varphi_i}^{k_i}(E) = R_i$ とおく。

$R_i = {\varphi_i}^{k_i}(E) = {\varphi_i}^{k_i+1}(E) = \cdots$ より部分空間 R_i 上では ${\varphi_i}^{k_i}$ は全単射である。

②　$Ker({\varphi_i}^{k_i}) = G_i$　;　$G_i = \{x$; ある k があって ${\varphi_i}^{k}(x) = 0\} = \{x;\ {\varphi_i}^{k_i}(x) = 0\}$

明らかに $G_i \supseteq \{x;\ {\varphi_i}^{k_i}(x) = 0\}$。逆にあるｋがあって ${\varphi_i}^{k}(x) = 0$ のとき、$k \leq k_i$ ならば明らかに ${\varphi_i}^{k_i}(x) = {\varphi_i}^{k_i - k}({\varphi_i}^{k}(x)) = 0$。$k > k_i$ ならば $y = {\varphi_i}^{k-1}(x)$ とすると $k - 1 \geq k_i$ より $y \in R_i$ よって $\varphi_i(y) = {\varphi_i}^{k}(x) = 0$ 、①より $y = {\varphi_i}^{k-1}(x) = 0$ すなわちｋの値を１つ減らせる。これを繰り返すと ${\varphi_i}^{k_i}(x) = 0$ 、すなわち $x \in ({\varphi_i}^{k_i})^{-1}(0)$ 。

③　$E = G_i \oplus R_i$

$G_i = Ker({\varphi_i}^{k_i}),\ R_i = \mathrm{Im}({\varphi_i}^{k_i})$ より $\dim E = \dim G_i + \dim R_i$。故に $G_i \cap R_i = \{0\}$ を示せばよい。$x \in G_i \cap R_i$ ならば ${\varphi_i}^{k_i}(x) = 0$。一方 $x \in R_i$ よりある $y \in E$ によって $x = {\varphi_i}^{k_i}(y)$ 、これより ${\varphi_i}^{2k_i}(y) = 0$、すなわち $y \in G_i$。これより $x = {\varphi_i}^{k_i}(y) = 0$。

④　G_i, R_i は $\varphi -$ 不変な線形部分空間。　$\varphi_i = \varphi - \lambda_i I$ と φ は可換なので、

$x \in G_i$ のとき、${\varphi_i}^{k_i}(\varphi(x)) = \varphi({\varphi_i}^{k_i}(x)) = \varphi(0) = 0$ 、よって $\varphi(x) \in G_i$ 。

$x \in R_i$ のとき、$x = \varphi_i^{k_i}(y),\ (y \in E)$、よって $\varphi(x) = \varphi(\varphi_i^{k_i}(y)) = \varphi_i^{k_i}(\varphi(x)) \in R_i$。

⑤　φ の G_i 上の固有値は λ_i のみ。R_i 上の固有値は λ_i を除く全ての $\lambda_1, \cdots \lambda_r$。

G_i が $\lambda_j\ (j \neq i)$ を固有値に持つとする。それに対応する固有ベクトルを $x \in G_i$ とすると

$\varphi(x) = \lambda_j x \quad (x \neq 0),$ これより $0 = \varphi_i^{k_i}(x) = (\varphi - \lambda_i I)^{k_i}(x) = (\lambda_j - \lambda_i)^{k_i} x \neq 0$ となり矛盾。

$x \in R_i$ のとき、①より $\varphi_i(x) = 0$ なら $x = 0$。よって λ_i は R_i の固有値ではない。

$G_i,\ R_i$ の基底をそれぞれ $\{e_1, \cdots e_\mu\}, \{f_1, \cdots f_\nu\}$ とすると、これら $\mu + \nu$ 個のベクトルはＥの基底になる。この基底による φ の行列表示は

$(\varphi(e_1), \cdots \varphi(e_\mu), \varphi(f_1), \cdots, \varphi(f_\nu)) = (e_1, \cdots, e_\mu, f_1, \cdots, f_\nu)\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$　、　$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$

A, B はそれぞれ φ の G_i 上、R_i 上の表現行列。φ の固有多項式は

$\det(M - \lambda I) = \det(A - \lambda I)\det(B - \lambda I), \qquad \det(M - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_r - \lambda)^{m_r}$

かつ $\det(A - \lambda I) = 0$ は $\lambda = \lambda_i$ のみを解に持つので $\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_i}$,

$\det(B - \lambda I) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} (\lambda_j - \lambda)^{m_j}$　。これより $\dim G_i = m_i$。

⑥　$E = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_r$　　（直和）

まず③より $E = G_1 \oplus R_1$、部分空間 $G_1,\ R_1$ は線形変換 φ, φ_j について不変である。部分空間 R_1 に①～⑤の議論を繰り返し使うことにより $E = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_r \oplus R$ を得る。R は φ 不変で固有値を全く含まない。$\dim R \geq 1$ ならばこのようなことは起こらないので $R = \{0\}$。

系 1-1.　$\dim G_i = m_i$　（λ_iの代数的重複度m_iは一般固有空間の次元に等しい）

系 1-2.　$k_i \leq m_i$

k_i は $E \supseteq \varphi_i(E) \supseteq \varphi_i^2(E) \supseteq \varphi_i^3(E) \supseteq \cdots$ において次元が減少する回数を表わすが、次元の減少は部分空間 G_i のみで起こるので、その次元数 m_i を超えない。

§２．最小多項式

定義１.　φ の最小多項式：$\Psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \ldots .(\lambda - \lambda_r)^{k_r}$　（k_j は固有値 λ_j の標数）

定理２.

（１） $\Psi(\varphi)=0$

（２） φ の固有多項式 $\Phi(\lambda)$ は最小多項式 $\Psi(\lambda)$ で割り切れる。故に $\Phi(\varphi)=0$

Hamilton-Cayley の定理

（３）最小多項式 $\Psi(\lambda)$ は $Q(\varphi)=0$ を満たす多項式 $Q(\lambda)$ を全て割り切る。

＜証明＞

（１） 任意の $x=x_1+\cdots x_r \quad (x_i \in G_i)$ について

$$\Psi(\varphi)(x)=\sum_{i=1}^{r}\Psi(\varphi)(x_i)=\sum_{i=1}^{r}(\prod_{j=1}^{r}(\varphi-\lambda_j I)^{k_j})(x_i)=0 \quad \text{なぜなら} (\varphi-\lambda_i I)^{k_i}(x_i)=0 \text{。}$$

（２） $\Phi(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_r}$ ， $k_i \le m_i \ (i=1,..,r)$ より明らか。

（３） $Q(\lambda)$ を $Q(\varphi)=0$ を満たす多項式とする。 $\lambda=\lambda_i$ を中心としたティラー展開により

$$Q(\lambda)=Q(\lambda_i)+\frac{Q^{'}(\lambda_i)}{1!}(\lambda-\lambda_i)+\cdots\frac{Q^{(p)}(\lambda_i)}{p!}(\lambda-\lambda_i)^p \text{。}$$

$x \in G_i$， $\varphi_i^{k_i-1}(x) \neq 0$ とすると、

$$0=Q(\varphi)(x)=Q(\lambda_i)x+\frac{Q^{'}(\lambda_i)}{1!}\varphi_i(x)+\cdots\frac{Q^{(p)}(\lambda_i)}{p!}\varphi_i{}^p(x) \text{。}$$

$p \ge k_i$ なら $\varphi_i{}^p(x)=0$ より $\quad 0=Q(\lambda_i)x+\dfrac{Q^{'}(\lambda_i)}{1!}\varphi_i(x)+\cdots\dfrac{Q^{(k_i-1)}(\lambda_i)}{(k_i-1)!}\varphi_i{}^{k_i-1}(x)$ 。

次の補題１より $x,\varphi_i(x),\cdots,\varphi_i{}^{k_i-1}(x)$ は一次独立なので、

$Q(\lambda_i)=Q^{'}(\lambda_i)=\cdots=Q^{(k_i-1)}(\lambda_i)=0$ 。これは多項式 $Q(\lambda)$ が $\lambda=\lambda_i$ を少なくとも k_i

重根として持っていることを意味する。よって $Q(\lambda)$ は $(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$ で割り切れる。

従って $Q(\lambda)$ は $\Psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_r}$ で割り切れる。

補題１．線形変換 φ に対し $\varphi^k(x)=0,\ \ \varphi^{k-1}(x)\neq 0$ なら、 $x,\ \varphi(x),....,\varphi^{k-1}(x)$ は線形独立である。

＜証明＞

$c_1x+c_2\varphi(x)+c_k\varphi^{k-1}(x)=0$ とする。両辺に φ^{k-1} を施すと $\varphi^k(x)=0$ より

$c_1\varphi^{k-1}(x)=0$ 、 $\varphi^{k-1}(x)\neq 0$ なので $c_1=0$ 。同様に $\varphi^{k-2},\varphi^{k-3},....$ を施すと順に $c_2=....=c_k=0$ 。

定義２． 線形変換φがべき零$\Leftrightarrow \varphi^k = 0$、　$k \geq 1$自然数

このようなkの最小の数をφの零化指数という。

定理３　べき零変換φの固有値は０のみ。逆に固有値が全て０ならφはべき零。

＜証明＞

固有値をλとすると$\varphi(x) = \lambda x,\ (x \neq 0)$　よって$\varphi^k(x) = \lambda^k x = 0$より$\lambda = 0$。

固有値が０だけとすると、φの固有方程式は$\Phi(\lambda) = \lambda^n$。よって定理２（２）より$\varphi^n = 0$。

系 3-1 べき零変換φの零化指数は固有値０の標数に等しい。(定理１より明らか)

定義３． 線形変換φが半単純$\Leftrightarrow \varphi = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_r p_r$,　$p_1,..., p_r$は射影作用素

系 3-2 べき零で半単純な変換は０に限る。

$\varphi = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_r p_r$とすると$\lambda_1 = \cdots \lambda_r = 0$より$\varphi = 0$。

定理４．　二つの半単純変換φ_1, φ_2が可換、$\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1$が成り立つための必要十分条件は共通な射影作用素の組$p_1,..., p_m$があって同時に

$\varphi_1 = \lambda_1 p_1 + \cdots \lambda_m p_m$,　$\varphi_2 = \mu_1 p_1 + \cdots \mu_m p_m$と表わされることである。

ただし、$\lambda_1,..., \lambda_m$や$\mu_1,..., \mu_m$は必ずしも異ならない。

＜証明＞　十分性は明らかなので、必要性を示す。φ_1, φ_2の射影分解を

$\varphi_1 = \lambda_1 p_1 + \cdots \lambda_m p_m$,　$\varphi_2 = \mu_1 q_1 + \cdots \mu_n q_n$とする。$\varphi_1$, φ_2が可換なので、その多項式も可換、よってp_iとq_jも可換である（射影作用素の表現参照)。そこで

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \lambda_1 p_1 \circ (q_1 + \cdots + q_n) + \cdots + \lambda_m p_m \circ (q_1 + \cdots + q_n), \\ \varphi_2 &= \mu_1 q_1 \circ (p_1 + \cdots + p_m) + \cdots + \mu_n q_n \circ (p_1 + \cdots + p_m)\end{aligned}$$

と書くと、これは$p_i \circ q_j$の線形結合である。そして$\{p_i \circ q_j;\ i = 1,.., m,\ \ j = 1,.., n\}$は射影作用素の条件

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i \circ q_j = \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \right) \circ \left(\sum_{j=1}^{n} q_j \right) = I, \qquad \left(p_i \circ q_j \right) \circ \left(p_k \circ q_l \right) = \delta_{i,k} \delta_{j,l} (p_i \circ q_j)$$

を満たしている。

系 4.1　二つの半単純変換φ_1, φ_2が可換なら線形結合$a\varphi_1 + b\varphi_2$および$\varphi_1 \circ \varphi_2$もまた半単純である。

＜証明＞

定理４より$\varphi_1 = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_m p_m$,　$\varphi_2 = \mu_1 p_1 + \cdots + \mu_m p_m$、よって

$a\varphi_1 + b\varphi_2 = (a\lambda_1 + b\mu_1) p_1 + \cdots + (a\lambda_m + b\mu_m) p_m$、$\varphi_1 \circ \varphi_2 = \lambda_1 \mu_1 p_1 + \cdots + \lambda_m \mu_m p_m$。

定理５．　２つのべき零変換φ_1,φ_2が可換なら、$\varphi_1+\varphi_2$，　$\varphi_1\circ\varphi_2$もべき零である。
＜証明＞

$\varphi_1{}^m=0,\ \varphi_2{}^n=0$、$m\le n$とする。可換なので$(\varphi_1\circ\varphi_2)^m=\varphi_1{}^m\circ\varphi_2{}^m=0$。

$(\varphi_1+\varphi_2)^{m+n}=\sum_{j=0}^{m+n}\binom{m+n}{j}\varphi_1{}^j\circ\varphi_2{}^{m+n-j}=0$。なぜなら、$j\le m$のとき、$m+n-j\ge n$。

○一般固有空間への射影作用素の表現

分解$E=G_1\oplus G_2\oplus\cdots\oplus G_r$の一般固有空間$G_i$への射影作用素を$p_i$とする。

$$I=p_1+\cdots+p_r,\quad p_i{}^2=p_i,\quad p_i\circ p_j=0\quad(i\ne j),\quad p_i(E)=G_i$$

φの最小多項式を$\Psi(\lambda)=\prod_{j=1}^{r}(\lambda-\lambda_j)^{k_j}$とする。$\dfrac{1}{\Psi(\lambda)}$を部分分数分解して

$\dfrac{1}{\Psi(\lambda)}=\dfrac{h_1(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{k_1}}+\cdots+\dfrac{h_r(\lambda)}{(\lambda-\lambda_r)^{k_r}}$、　$h_j(\lambda)$は高々k_j-1次の多項式。これより、

$1=h_1(\lambda)\dfrac{\Psi(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{k_1}}+\cdots+h_r(\lambda)\dfrac{\Psi(\lambda)}{(\lambda-\lambda_r)^{k_r}},$

$g_i(\lambda)=h_i(\lambda)\dfrac{\Psi(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^{k_i}}\ (i=1,2,..,r)$とすると$1=g_1(\lambda)+\cdots+g_r(\lambda)$。

$I=g_1(\varphi)+\cdots+g_r(\varphi)$より　$x=g_1(\varphi)(x)+\cdots+g_r(\varphi)(x)$。

$\varphi_i{}^{k_i}\left(g_i(\varphi)(x)\right)=(\varphi-\lambda_iI)^{k_i}\circ g_i(\varphi)(x)=h_i(\varphi)(\Psi(\varphi)(x))=0$より$g_i(\varphi)(x)\in G_i$

よって$p_i=g_i(\varphi),\quad g_i(\lambda)=h_i(\lambda)\prod_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{r}(\lambda-\lambda_j)^{k_j}$。

定理６.

任意の線形変換φは互いに可換な半単純変換とべき零変換の和として一意に表せる。

＜証明＞　分解の存在：

定理１よりφの一般固有空間によって直和分解：$E=G_1\oplus G_2\oplus\cdots\oplus G_r$。
これに対する射影$p_1,...,p_r$が決まり、$I=p_1+\cdots+p_r$、$\varphi=\varphi\circ I=\varphi\circ p_1+\cdots\varphi\circ p_r$。
$\varphi=(\varphi-\lambda_iI)+\lambda_iI=\varphi_i+\lambda_iI$とすると、

(2.1) $\varphi=(\varphi_1+\lambda_1I)\circ p_1+\cdots+(\varphi_r+\lambda_rI)\circ p_r=(\lambda_1p_1+\cdots\lambda_rp_r)+(\varphi_1\circ p_1+\cdots+\varphi_r\circ p_r)$
$=\psi+\theta$

(2.2)　$\psi=\lambda_1p_1+\cdots+\lambda_rp_r,\qquad\theta=\varphi_1\circ p_1+\cdots+\varphi_r\circ p_r$

ψ は明らかに半単純なので、θ がべき零であることを示す。φ_i, p_j は φ の多項式で表わされるので可換、よって $\theta^k = {\varphi_1}^k \circ p_1 + \cdots + {\varphi_r}^k \circ p_r$。$k = \max(k_1,...,k_r)$ とすると任意の $x \in E$ について $p_i(x) \in G_i$ より

(2.3) $\theta^k(x) = {\varphi_1}^k(p_1(x)) + \cdots + {\varphi_r}^k(p_r(x)) = 0$、よって $\theta^k = 0$。

分解の一意性：
別の表現　$\varphi = \psi_1 + \theta_1$ があるとすると、$\psi + \theta = \psi_1 + \theta_1$ より $\psi - \psi_1 = \theta_1 - \theta$。
ψ_1 と θ_1 は可換なので ψ_1 は $\psi_1 + \theta_1 = \varphi$ と可換である。半単純変換 ψ は φ の多項式で表わされるので ψ_1 と ψ も可換、同様に θ_1 と θ も可換である。故に系 4.1 より $\psi - \psi_1$ は単純、定理 5 より $\theta_1 - \theta$ はべき零である。系 3.2 より $\psi - \psi_1 = \theta_1 - \theta = 0$ である。

系 6-1　θ の零化指数は $k_0 = \max(k_1,...,k_r)$ である。
＜証明＞式(2.3)より $k \geq \max(k_1,...,k_r)$ なら $\theta^k = 0$。$k < \max(k_1,...,k_r)$ なら $x \in G_i = p_i(E)$ で ${\varphi_i}^k(x) \neq 0$ となるものが存在する。$p_j(x) = 0$ $(j \neq i)$ なので

$\theta^k(x) = 0 + \cdots + {\varphi_i}^k(x) + \cdots + 0 \neq 0$、よって $k_0 = \max(k_1,...,k_r)$ である。

系 6-2　線形変換 φ が半単純であるための必要十分条件は φ の固有値の標数がすべて 1 であることである。すなわち、φ の最小多項式が重根を持たないことである。
＜証明＞　φ が半単純 $\Leftrightarrow \theta = 0 \Leftrightarrow k_0 = \max(k_1,...,k_r) = 1 \Leftrightarrow k_1 = \cdots k_r = 1$。

§３．行列との対応、ジョルダン標準形

φ の一般固有空間　$G_1, G_2, ..., G_r$　、　$E = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_r$。

基底：　$e_{11},.........e_{1m_1}$ $(\in G_1)$; ....; $e_{r1},.....,e_{rm_r}$ $(\in G_r)$

上の基底を取ったときの表現行列は

$$(\varphi(e_{11}),....,\varphi(e_{r\,m_r})) = (e_{11},....,e_{r\,m_r})\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{bmatrix}$$
、A_i は部分空間 G_i での表現行列

$\varphi = \psi + \theta$　（半単純変換＋べき零変換）とすると、$\varphi(e_{ij}) = \psi(e_{ij}) + \theta(e_{ij})$,

ψ は単純なので、$\psi(e_{ij}) = \lambda_i e_{ij} \quad (j = 1,..,m_i\ ;\ i = 1,..,r)$。よって ψ の表現行列は

$$(\psi(e_{11}),...,\psi(e_{rm_r})) = (e_{11},...,e_{rm_r})\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \lambda_r & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \lambda_r \end{bmatrix}$$

べき零変換 θ の表現行列は

$$(\theta(e_{11}),...,\theta(e_{rm_r})) = (e_{11},...,e_{rm_r})\begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_r \end{bmatrix}、$$

$B_i = A_i - \lambda_i I$ ： G_i 上で考えたべき零線形変換 θ の表現行列

$$B_i^{k_i} = 0, \quad B_i^{k_i - 1} \neq 0$$ 零化指数 k_i は固有値 λ_i の標数に等しい

○ θ の零化指数がＥの次元ｎに等しいとき、ある $x \in E$ が存在して $\theta^{n-1}(x) \neq 0$
線形独立系 $\{\theta^{n-1}(x), \theta^{n-1}(x),......., \theta(x), x\}$ を基底に取る。

$$\theta(\theta^{n-1}(x), \theta^{n-2}(x),..., x) = (\theta^{n-1}(x), \theta^{n-2}(x),..., x)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (\theta^{n-1}(x), \theta^{n-2}(x),..., x)N$$

○　零化指数 $k(< n)$ のとき

定理７.
零化指数 $k(< n)$ のべき零変換 θ の表現行列は

$$N=\begin{bmatrix} N_1 & & & \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_s \end{bmatrix},\quad ただし\ N_i=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$ の形のものが選べる。

零化指数 $k(<n)$ は $N_1,\ldots,N_s$ の最大次数に等しい。

＜証明＞

①$W_i=\{x;\ \theta^i(x)=0\}\ \ i=1,2,\ldots,k$ とおく。各 W_i は線形部分空間で $W_k=E,\quad W_1$ は θ の固有値０の固有空間である。$\{0\}\subset W_1\subset W_2\subset\cdots\subset W_{k-1}\subset W_k=E$。$W_k-W_{k-1}$ から線形独立なベクトル $x_1,\ldots,x_{r_1}$ をとる。$E=W_{k-1}\oplus[x_1,x_2,\ldots.,x_{r_1}]$（直和）。

$$(3.1)\quad \begin{array}{l} \theta^{k-1}(x_1),\theta^{k-2}(x_1),\cdots,\theta(x_1),x_1 \\ \theta^{k-1}(x_2),\theta^{k-2}(x_2),\cdots,\theta(x_2),x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \theta^{k-1}(x_{r_1}),\theta^{k-2}(x_{r_1}),\cdots,\theta(x_{r_1}),x_{r_1} \end{array}$$ とすると、これらの $k\times r_1$ 個のベクトルは線形独立。

$\sum_{i=1}^{r_1}c_{1i}\theta^{k-1}(x_i)+\sum_{i=1}^{r_1}c_{2i}\theta^{k-2}(x_i)+\cdots+\sum_{i=1}^{r_1}c_{k-1,i}\theta(x_i)+\sum_{i=1}^{r_1}c_{ki}x_i=0$ とする。両辺に θ^{k-1} を作用させると、$\theta^k(x_i)=0$ より $\sum_{i=1}^{r_1}c_{ki}\theta^{k-1}(x_i)=0$。すなわち $\sum_{i=1}^{r_1}c_{ki}x_i\in W_{k-1}$、よって $\sum_{i=1}^{r_1}c_{ki}x_i=0$。

$x_1,\ldots,x_{r_1}$ の線形独立性より $c_{ki}=0\ \ (i=1,..,r_1)$。同様に両辺に θ^{k-2} を作用させると

$\sum_{i=1}^{r_1}c_{k-1,i}\theta^{k-1}(x_i)=0$。従って同様にして $c_{k-1,i}=0\ \ (i=1,..,r_1)$。これを繰り返せばよい。

(3.1)のベクトルで E 全体が張られているときは、これらのベクトルを基底とする θ の表現行列は

$$N=\begin{bmatrix} N_k & & & \\ & N_k & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_k \end{bmatrix},\quad N_k=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}\ (k\times k 行列)$$

N_k は k 個の基底 $\{\theta^{k-1}(x_i),\theta^{k-2}(x_i),\ldots,x_i\}$ で張られる部分空間での表現行列である。

②$\theta(x_1),\ldots,\theta(x_{r_1})\in W_{k-1}-W_{k-2}$ であるが、それに加えてさらに線形独立なベクトル

$y_1,\dots,y_{r_2}\in W_{k-1}-W_{k-2}$ を取ってくる、$W_{k-1}=W_{k-2}\oplus[\theta(x_1),\dots,\theta(x_{r_1}),y_1,\dots,y_{r_2}]$。(3.1)と同様に次のベクトルの系列を考えると、この $(k-1)\times r_2$ 個のベクトルは線形独立である。

$$
(3.2)\quad
\begin{array}{l}
\theta^{k-2}(y_1),\theta^{k-3}(y_1),\cdots,\theta(y_1),y_1\\
\theta^{k-2}(y_2),\theta^{k-3}(y_2),\cdots,\theta(y_2),y_2\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\theta^{k-2}(y_{r_2}),\theta^{k-2}(y_{r_2}),\cdots,\theta(y_{r_2}),y_{r_2}
\end{array}
$$

この操作を、E を張るまで繰り返す。

最終的に　$W_1 \subset W_2 \subset\cdots\subset W_{k-2}\subset W_{k-1}\subset W_k$

$$
(3.3)\quad
\begin{array}{l}
\theta^{k-1}(x_1),\theta^{k-2}(x_1),\cdots,\theta^2(x_1),\theta(x_1),\quad x_1\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\theta^{k-1}(x_{r_1}),\theta^{k-2}(x_{r_1}),\cdots,\theta^2(x_{r_1}),\theta(x_{r_1}),\quad x_{r_1}\\
\\
\theta^{k-2}(y_1),\theta^{k-3}(y_1),\cdots,\theta(y_1),\quad y_1\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\theta^{k-2}(y_{r_2}),\theta^{k-3}(y_{r_2}),\cdots,\theta(y_{r_2}),\quad y_{r_2}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
z_1\\
\vdots\\
z_s
\end{array}
$$

$k\times r_1+(k-1)\times r_2+\cdots+1\times s$ 個のベクトルが E の基底になっている。この基底を取ったときの θ の表現行列は

$$
\begin{bmatrix}
N_k & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & N_k & & & & \\
 & & & N_{k-1} & & & \\
 & & & & \ddots & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & N_1
\end{bmatrix},\quad
N_j=\begin{bmatrix}
0 & 1 & & & \\
 & 0 & 1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & 0 & 1\\
 & & & & 0
\end{bmatrix}\ (j\times j\text{行列})
$$

N_j をこの標準形のジョルダン細胞という。

定理８.　ジョルダン標準形

任意の線形変換φに対し適当にＥの基底を選ぶと、その表現行列が

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{bmatrix}、\quad ただし A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix} の形にできる。$$

小行列A_iの並べ方を別にすれば一意である。(3.3)の横一列に並んだベクトルの列をこの標準形に対応するジョルダン鎖という。

§４　ジョルダン標準形の例

例１.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$　固有方程式$\det(A-\lambda I) = (2-\lambda)^3 = 0$より$\lambda = 2$（三重解）。

Ｅ＝固有値$(\lambda = 2)$の一般固有空間。$(A-2I)^2 = 0$より最小多項式は$\Psi(\lambda) = (\lambda - 2)^2$,

標数=2、Ａは単純でない。標数２よりＡのジョルダン標準形は$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$。

$(A-2I)x \neq 0$となるxを求めれば、$(A-2I)x, x$が１つのジョルダン鎖である。例えば、$x = {}^t(0,0,1)$とすると、$(A-2I)x = {}^t(-1,1,-1) \neq 0$なので、${}^t(-1,1,-1),\ {}^t(0,0,1)$は１つのジョルダン鎖。$(A-2I)y = 0$を満たす$y \neq 0$を${}^t(-1,1,-1)$と線形独立に取る。例えば$y = {}^t(0,1,-1)$とする。この３つのベクトルを並べた行列を

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} としてAを変換すると T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}、ただし T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}。$$

なお、Ａのスペクトル分解は$A = 2I + (A-2I) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$であって、

この第２項をＴで変換して$T^{-1}(A-2I)T=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$を得る。

例２.

$A=\begin{bmatrix}-1&2&0&-1\\1&2&-1&-2\\-1&-1&0&1\\2&6&-2&-5\end{bmatrix}$　　固有方程式$\det(A-\lambda I)=(1+\lambda)^4=0$より$\lambda=-1$。

$(A+I)\neq O,\ \ (A+I)^2=O$より$\lambda=-1$の零化指数（＝固有値$\lambda=-1$の標数）は２である。ジョルダン鎖は$\{(A+I)x_1,x_1;\ (A+I)x_2,x_2\}$または$\{(A+I)x_1,x_1;y_1,y_2\}$のタイプ、すなわちＡのジョルダン標準形は

$$\begin{bmatrix}-1&1&&\\&-1&&\\&&-1&1\\&&&-1\end{bmatrix},\ \text{または}\begin{bmatrix}-1&1&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{bmatrix}$$のいづれかの形になる。

$W_1=\{x;(A+I)x=0\}$の次元が２なら第１のタイプ、３次元なら第２のタイプとなる。

$$Rank(A+I)=Rank\begin{bmatrix}0&2&0&-1\\1&3&-1&-2\\-1&-1&1&1\\2&6&-2&4\end{bmatrix}=Rank\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\1&-1&-1&-2\\-1&1&1&1\\2&-2&-2&-4\end{bmatrix}=2$$

よって$\dim(W_1)=Ker(A+I)=4-Rank(A+I)=2$。Ａの標準形は第１の形である。

各ジョルダン細胞のジョルダン鎖を求める。$(A+I)x\neq 0$である線形独立な二つのベクトルx_1,x_2を取ると、$\{(A+I)x_1,x_1\},\ ((A+I)x_2,x_2\}$が二つのジョルダン鎖になる。

例えば$x_1={}^t(0,1,1,1),\ x_2={}^t(0,1,0,1)$と取ることができるので、$(A+I)x_1={}^t(1,0,1,0)$ $(A+I)x_2={}^t(1,1,0,2)$。従って標準化行列Ｔは

$$T=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\1&1&0&0\\0&1&2&1\end{bmatrix},\ T^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\-1&-1&1&1\\0&-1&0&1\\1&3&-1&-2\end{bmatrix}$$、これより$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$。

例３

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，固有方程式 $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 (\lambda - 1)^2 = 0$ より $\lambda = 0, 1$。

$A - I,\ (A - I)^2;\ A,\ A^2$ の階数の低下を調べる。

$A - I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ (A - I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ よりいずれも Rank は２である。

$(A - I)(E) = (A - I)^2 (E)$ より固有値 $\lambda = 1$ の標数は１で一般固有空間はこの固有値の固有空間に等しい。この部分については対角化可能で固有ベクトルとして例えば $x_1 = {}^t\,(1.0.0.0)$ $x_2 = {}^t\,(0,0,1,0)$ とする。次にＡの階数は３であるが、

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $Rank(A^2) = 2$、故に $A(E) \supset A^2 (E)$ となり固有値０の標数は $k \geq 2$ である。他方 $\lambda = 0$ の重複度は $m = 2$ である。$k \leq m = 2$ より $k = 2$ となる。

従って、固有値 $\lambda = 0$ の固有空間は１次元で、一般固有空間は２次元である。Ａの最小多項式は $\Psi(\lambda) = \lambda^2 (\lambda - 1)$ となる。またＡのジョルダン標準形は

$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ であり、固有値 $\lambda = 0$ に対するジョルダン鎖は $A^2 x = 0,\ Ax \neq 0$ となる x を一般固有空間から取って $\{Ax, x\}$ を作ればよい。例えば $x = {}^t\,(0,0,0,1),\ Ax = {}^t\,(1,1,1,0)$ と取ると、標準化行列Ｔは最初の固有ベクトル x_1, x_2 と共に並べて

$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となる。行列Ａの一般スペクトル分解は最小多項式を用いて直接一般固有空間への射影を計算する方が早い。

$\dfrac{1}{\lambda^2 (\lambda - 1)} = -\dfrac{1 + \lambda}{\lambda^2} + \dfrac{1}{\lambda - 1}$ より $1 = (1 - \lambda)(1 + \lambda) + \lambda^2$。$g_1(\lambda) = 1 - \lambda^2,\ g_2(\lambda) = \lambda^2$ とする。

これより、$P_1 = I - A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad P_2 = A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A=\{0\cdot P_1+1\cdot P_2\}+\{AP_1+(A-I)P_2\}=P_2+AP_1$$
$$=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

例４.

$A=\begin{bmatrix}0&1&-1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&-1\\0&1&-1&1\end{bmatrix}$，固有方程式$\det(A-\lambda I)=\lambda(\lambda-1)^3=0$より$\lambda=0,1$

固有値$\lambda=0$は単根で固有ベクトルとしては$z={}^t(0,0,1,1)$が取れる。

$A-I=\begin{bmatrix}-1&1&-1&1\\0&0&0&0\\1&0&0&-1\\0&1&-1&0\end{bmatrix},(A-I)^2=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&1\\-1&0&0&1\end{bmatrix},(A-I)^3=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&-1\\1&0&0&-1\end{bmatrix}$

階数はそれぞれ、２、１、１である。従って$\lambda=1$の標数は２である。$\lambda=1$の一般固有空間

は３次元なので、そのジョルダン細胞は$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$の形となる。ジョルダン鎖は

$(A-I)x\neq 0$なるxを取って$\{(A-I)x,x\}$、および$(A-I)y=0$で$(A-I)x$と一次独立なベクトル$\{y\}$を取ればよい。例えば、$\{(A-I)x={}^t(1,0,0,1),x={}^t(0,1,0,0)\}$および$\{y={}^t(0,1,1,0)\}$が取れる。従って、標準化行列Ｔは

$T=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{bmatrix},T^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&-1&1\\1&0&1&-1\\-1&0&0&1\end{bmatrix}$ このとき$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$。

最小多項式は$\Psi(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2$である。

$\dfrac{1}{\lambda(\lambda-1)^2}=\dfrac{2-\lambda}{(\lambda-1)^2}+\dfrac{1}{\lambda},\ 1=\lambda(2-\lambda)+(\lambda-1)^2$より$g_1(\lambda)=\lambda(2-\lambda),\ g_2(\lambda)=(\lambda-1)^2$。

従って、$P_2=(A-I)^2=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&1\\-1&0&0&1\end{bmatrix}$，$P_1=I-P_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&-1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$である。そして、

$$A=\{1\cdot P_1+0\cdot P_2\}+\{(A-I)P_1+AP_2\}=P_1+(A-P_1)$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&-1\\1&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&1&-1&1\end{bmatrix}$$

§５　$(\lambda I-\varphi)^{-1}$の構造

定理９.

線形変換φの異なる固有値を全部で$\lambda_1,\cdots\lambda_r$とする。固有値$\lambda_i$に対応する一般固有空間を$G_i$、$G_i$への射影作用素を$p_i$、また$\lambda_i$の標数を$k_i$とするとき、$(\lambda I-\varphi)^{-1}$は$\lambda$の有理関数でその部分分数展開は次式で与えられる。

$$(5.1)\quad (\lambda I-\varphi)^{-1}=\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{k_j}\frac{(\varphi-\lambda_i I)^{j-1}}{(\lambda-\lambda_i)^j}\right)\circ p_j$$

＜証明＞

$I=\sum_{i=1}^{r}p_i$ より $\varphi-\lambda I=\sum_{i=1}^{r}(\varphi-\lambda I)\circ p_i$

$$(5.2)\quad (\varphi-\lambda I)\circ p_i=(\varphi-\lambda_i I)\circ p_i+(\lambda_i-\lambda)p_i=(\lambda_i-\lambda)\left(I-\frac{\varphi-\lambda_i I}{\lambda-\lambda_i}\right)\circ p_i$$

ここで$q_i=\dfrac{1}{\lambda_i-\lambda}\left\{I+\left(\dfrac{\varphi-\lambda_i I}{\lambda-\lambda_i}\right)+\cdots+\left(\dfrac{\varphi-\lambda_i I}{\lambda-\lambda_i}\right)^{k_i-1}\right\}\circ p_i$として、$q_i$を(5.2)に掛けると

q_iはφの多項式なので可換、よって$G_i=p_i(E)$上では$(\varphi-\lambda_i I)^{k_i}=0$に注意すると

$$(\varphi-\lambda I)\circ p_i\circ q_i=\left\{I-\left(\frac{\varphi-\lambda_i I}{\lambda-\lambda_i}\right)^{k_i}\right\}\circ p_i=p_i\text{。}$$

iについて加えると$(\varphi-\lambda I)\circ(\sum_{i=1}^{r}p_i\circ q_i)=\sum_{i=1}^{r}p_i=I$。

従って　$$(\lambda I-\varphi)^{-1}=-\sum_{i=1}^{r}p_i\circ q_i=\sum_{i=1}^{r}\left\{\frac{1}{\lambda-\lambda_i}+\frac{\varphi-\lambda_i I}{(\lambda-\lambda_i)^2}+\cdots+\frac{(\varphi-\lambda_i I)^{k_i-1}}{(\lambda-\lambda_i)^{k_i}}\right\}\circ p_i$$

固有値λ_iの標数k_iは$(\lambda I-\varphi)^{-1}$という有理関数の特異点λ_iの極としての位数を表わす。

系 9.1

$(\lambda I-\varphi)^{-1}=\dfrac{D(\lambda)}{\Psi(\lambda)}$, ここで $\Psi(\lambda)$ は φ の最小多項式、$D(\lambda)$ は線形変換を係数とする λ の多項式で、それらの係数は全て φ の多項式である。そして $D(\lambda)$ と $\Psi(\lambda)$ は既約である。

＜証明＞

式(5.1)の右辺を通分すると $\dfrac{D(\lambda)}{\Psi(\lambda)}$ の形で $D(\lambda)$ は φ の多項式を係数とする λ の多項式になる。従って $D(\lambda)$ と $\Psi(\lambda)$ がλの多項式として既約であることを示す。

$\Psi(\lambda)(\lambda I-\varphi)^{-1}=D(\lambda),\ \Psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_r}$ より $D(\lambda_i)\neq 0\ \ (i=1,\ldots,r)$ を言えばよい。(5.1)の両辺に $\Psi(\lambda)$ を掛けると $D(\lambda)=\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{k_i}(\lambda-\lambda_i)^{k_i-1}(\varphi-\lambda_i I)^{j-1}\right)\circ p_i$ 、

G_i 上で $(\varphi-\lambda_i I)^{k_i-1}(x)\neq 0$ となる $x\in G_i$ が存在するので $D(\lambda_i)=(\varphi-\lambda_i I)^{k_i-1}\circ p_i\neq 0$ 。

系 9.1 を行列で言うと次の定理を得る。

定理１０

n 次正方行列 A の固有方程式を $\Phi(\lambda)$ 、$A-\lambda I$ のすべての $n-1$ 次小行列式の、λの多項式としての最大公約数を $d(\lambda)$ 、A の最小多項式を $\Psi(\lambda)$ とすると　$\Psi(\lambda)=\dfrac{\Phi(\lambda)}{d(\lambda)}$。

＜証明＞

$\Phi(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ を第 1 行について余因子展開すると $\Phi(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}a_{1j}(\lambda)\Delta_{1i}(\lambda)$。$\Delta_{1i}(\lambda)$ は余因子で $n-1$ 次小行列式なので $d(\lambda)$ を共通因子として持つ。従って $\Phi(\lambda)$ は $d(\lambda)$ で割り切れる。$A-\lambda I$ の逆行列は

$$(A-\lambda I)^{-1}=\frac{(A-\lambda I)\text{の余因子行列}}{\det(A-\lambda I)}=\frac{d(\lambda)D(\lambda)}{\Phi(\lambda)}=\frac{D(\lambda)}{\Phi(\lambda)/d(\lambda)}$$

分子の行列の各要素は共通因子を持たないので、どのような λ の値についても 0 行列にはならない。よって系 9.1 より $\Psi(\lambda)=\dfrac{\Phi(\lambda)}{d(\lambda)}$。

例５.

$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$について、$A-\lambda I$ の余因子行列は$B(\lambda)=(\lambda+1)\begin{bmatrix}\lambda-2 & 2 & 3\\ 0 & \lambda-3 & 0\\ 1 & 2 & \lambda\end{bmatrix}$。

$\det(A-\lambda I)=-(\lambda+1)^2(\lambda-3)$ より最小多項式は$\Psi(\lambda)=\dfrac{(\lambda+1)^2(\lambda-3)}{(\lambda+1)}=(\lambda+1)(\lambda-3)$。

§６．正規変換、エルミート変換、ユニタリー変換

６．１　複素線形空間における内積、エルミート変換、ユニタリー変換

内積$<x,y>$；$x,y\in E$ は次の３つの条件を満たす

①$<x_1+x_2,y>=<x_1,y>+<x_2,y>,\quad <\lambda x,y>=\lambda<x,y>$

②$<y,x>=\overline{<x,y>}$　（複素共役）

③$<x,x>\geq 0,$ かつ$<x,x>=0$ は$x=0$ のときのみ成立する。

ベクトル$x\in E$ の長さを$|x|=\sqrt{<x,x>}$ で定義する。

定義４

複素線形空間Ｅの線形変換φ がエルミート変換$\Leftrightarrow <\varphi(x),y>=<x,\varphi(y)>$

複素線形空間Ｅの線形変換φ がユニタリー変換$\Leftrightarrow <\varphi(x),\varphi(y)>=<x,y>$

定理１１　複素線形空間Ｅにおいて

（１）φ がエルミート変換$\Leftrightarrow$ 任意の$x\in E$について$<x,\varphi(x)>$が実数

（２）φ がユニタリー変換$\Leftrightarrow$ 任意の$x\in E$について$|\varphi(x)|=|x|$。

＜証明＞

必要性：（１）$<\varphi(x),x>=<x,\varphi(x)>$、他方$<\varphi(x),x>=\overline{<x,\varphi(x)>}$ なので$<x,\varphi(x)>$

は実数。　（２）$<\varphi(x),\varphi(x)>=<x,x>$ より$|\varphi(x)|=|x|$

十分性：（１）任意の$x,y\in E$ について$<x+y,\varphi(x+y)>$が実数ならば

$<x+y,\varphi(x+y)>=\overline{<x+y,\varphi(x+y)>}=<\varphi(x+y),x+y>$　これより

$<x+y,\varphi(x)+\varphi(y)>=<\varphi(x)+\varphi(y),x+y>$。$<x,\varphi(x)>=<\varphi(x),x>$ などより

$<y,\varphi(x)>+<x,\varphi(y)>=<\varphi(x),y>+<\varphi(y),x>$。$<y,\varphi(x)>=\overline{<\varphi(x),y>}$を用いて

整頓すると　$<\varphi(x),y>-\overline{<\varphi(x),y>}=<x,\varphi(y)>-\overline{<x,\varphi(y)>}$。複素数 z について

$z-\overline{z}=2\,\mathrm{Im}(z)$なので　$2\,\mathrm{Im}<\varphi(x),y>=2\,\mathrm{Im}<x,\varphi(y)>$。

今までの計算をベクトルixとyについて行うと

$i<\varphi(x),y>+i\overline{<\varphi(x),y>}=i<x,\varphi(y)>+i\overline{<x,\varphi(y)>}$、$i$で割ると

$<\varphi(x),y>+\overline{<\varphi(x),y>}=<x,\varphi(y)>+\overline{<x,\varphi(y)>}$、これより複素数の実数部の等式

$2\,\mathrm{Re}<\varphi(x),y>=2\,\mathrm{Re}<x,\varphi(y)>$が成り立ち、以上より$<\varphi(x),y>=<x,\varphi(y)>$。

（２）$<\varphi(x+y),\varphi(x+y)>=<x+y,x+y>$より展開して整理すると

$<\varphi(x),\varphi(y)>+<\varphi(y),\varphi(x)>=<x,y>+<y,x>$。

これから　$\mathrm{Re}<\varphi(x),\varphi(y)>=\mathrm{Re}<x,y>$。同じことを$ix$と$y$について行うと

$i\{<\varphi(x),\varphi(y)>-<\varphi(y),\varphi(x)>\}=i\{<x,y>-<y,x>\}$、これより

$\mathrm{Im}<\varphi(x),\varphi(y)>=\mathrm{Im}<x,y>$、以上より$<\varphi(x),\varphi(y)>=<x,y>$。

６．２　共役変換

$\varphi^*:\varphi$の共役変換$\Leftrightarrow <\varphi(x),y>=<x,\varphi^*(y)>$

定理１２　共役変換は次の性質を持つ。

（１）$(\varphi_1+\varphi_2)^*=\varphi_1^*+\varphi_2^*$　　（２）$(\lambda\varphi)^*=\overline{\lambda}\varphi^*$

（３）$(\varphi_1\circ\varphi_2)^*=\varphi_2^*\circ\varphi_1^*$　　（４）$(\varphi^*)^*=\varphi$

（５）$(\varphi^{-1})^*=(\varphi^*)^{-1}$

＜証明＞

（１）（２）（４）は明らか。

（３）$<x,(\varphi_1\circ\varphi_2)^*(y)>=<\varphi_1\circ\varphi_2(x),y>=<\varphi_2(x),\varphi_1^*(y)>=<x,\varphi_2^*\circ\varphi_1^*(y)>$

（５）任意のx,yについて$<x,(\varphi^{-1})^*(y)>=<x,(\varphi^*)^{-1}(y)>$を言えばよい。$\varphi^{-1}(x)=z$とすると$x=\varphi(z)$。よって$<x,(\varphi^{-1})^*(y)>=<\varphi(z),(\varphi^{-1})^*(y)>=<\varphi^{-1}\circ\varphi(z),y>=<z,y>$。他方$<x,(\varphi^*)^{-1}(y)>=<\varphi(z),(\varphi^*)^{-1}(y)>=<z,\varphi^*\circ(\varphi^*)^{-1}(y)>=<z,y>$となり証明された。

定理１３　（１）φがエルミート変換$\Leftrightarrow\ \varphi^*=\varphi$　；φがユニタリー変換$\Leftrightarrow\ \varphi^*=\varphi^{-1}$

（2）１つの正規直交基底によるφの表現行列がAのとき、φ^*の表現行列は${}^t\overline{A}$。

＜証明＞（1）は定義より明らか。

（2）　正規直交基底を取ると内積は$< x, y >= {}^t x \cdot \overline{y}$と表わせる。

従って、$< \varphi(x), y >=< x, \varphi^*(y) >$より　φ, φ^*の表現行列を$A,\ A^*$とすると

${}^t(Ax)\cdot\overline{y} = {}^t x \cdot \overline{A^* y}$、すなわち${}^t x {}^t A \overline{y} = {}^t x \overline{A^*}\overline{y}$。これより${}^t A = \overline{A^*},\ A^* = {}^t\overline{A}$となる。

エルミート行列は${}^t\overline{A} = A,$　ユニタリー行列は${}^t\overline{A} = A^{-1}$を満たす行列である。

６．３　エルミート変換の固有値問題

定理１４　Eを複素ユークリッド線形空間、φをその上のエルミート変換とする。

（1）φの固有値はすべて実数である。

（2）異なる固有値に対応する固有ベクトルは互いに直交する。

＜証明＞（1）$\varphi(x) = \lambda x,\ (x \neq 0)$とすると

$\lambda|x|^2 =< \lambda x, x >=< \varphi(x), x >=< x, \varphi(x) >=< x, \lambda x >= \overline{\lambda}|x|^2$ よってλは実数。

（2）$\varphi(x) = \lambda x,\ \varphi(y) = \mu y \quad (\lambda \neq \mu)$とする。

$\lambda < x, y >=< \lambda x, y >=< \varphi(x), y >=< x, \varphi(y) >=< x, \mu y >= \overline{\mu} < x, y >= \mu < x, y >$

$(\lambda - \mu) < x, y >= 0,\ \lambda \neq \mu$より$< x, y >= 0$。

定理１５　φをエルミート変換とするとき、ある線形部分空間Fが$\varphi-$不変なら$F^\perp$も$\varphi-$不変である。

＜証明＞任意の元$y \in F^\perp$を取る。Fの任意の元 xにつき$\varphi(x) \in F$なので

$< x, \varphi(y) >=< \varphi(x), y >= 0$、従って$\varphi(y) \in F^\perp$。

定理１６　エルミート変換φの異なる固有値を全部で$\lambda_1, ..., \lambda_r$とし、各$\lambda_i$に対応する固有空間を$F_i\ (i = 1, \cdots, r)$とすると$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$　（直和）。

＜証明＞　定理１の特別な場合になる。

系 16.1　エルミート変換φに対し、互いに直交する正射影の組$p_1, \cdots p_r$が一意に決まり

$\varphi = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_r p_r, \qquad I = p_1 + \cdots + p_r$が成り立つ。

＜証明＞　各固有空間F_iへの正射影をp_iと置けば良く、この決め方は一意である。

系 16.2　逆に直交する正射影の組$p_1, \cdots p_r$があって、 $I = p_1 + \cdots + p_r$が成り立つとき、任意の実数$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$をとって$\varphi = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_r p_r$と置くと$\varphi$はエルミート変換で

ある。λ_i は固有値で、 $p_i(E)$ は λ_i に対応する固有空間である。

定義５

エルミート変換 φ が半正定値 $\Leftrightarrow < x, \varphi(x) >= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left| p_i(x) \right| \geq 0$ が全ての x について成り立つ。

$\Leftrightarrow$ 全ての固有値 $\lambda_i \geq 0$

エルミート変換 φ が正定値　$\Leftrightarrow$ 全ての固有値 $\lambda_i > 0$

定理１７

任意の線形変換 φ に対し、$\varphi^* \circ \varphi$ 及び $\varphi \circ \varphi^*$ は半正定値エルミート変換である。
これらが正定値となるための必要十分条件は φ が正則であることである。

＜証明＞

任意のベクトル x に対し $< x, \varphi^* \circ \varphi(x) >=< \varphi(x), \varphi(x) > \geq 0$ なので定理　　より
半正定値エルミート変換である。$\varphi^* \circ \varphi$ が正定値になるためには $\varphi(x) = 0$ から $x = 0$ が従うことが必要十分である。すなわち、φ が全単射であることが必要十分である。

６．４　正規変換、ユニタリー変換の固有値問題

定義６　　線形変換 φ が正規変換である $\Leftrightarrow \varphi^* \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^*$

（例：エルミート変換、ユニタリー変換）

定理１８　　正規変換 φ の１つの固有値をλ、対応する固有ベクトルの１つを $x (\neq 0)$ とすると $\varphi^*(x) = \bar{\lambda} x$

＜証明＞正規変換 φ について

$$\left| \varphi(x) \right|^2 =< \varphi(x), \varphi(x) >=< x, \varphi^* \circ \varphi(x) >=< x, \varphi \circ \varphi^*(x) >=< \varphi^*(x), \varphi^*(x) >= \left| \varphi^*(x) \right|^2$$

φ が正規のとき $\varphi - \lambda I$ も正規変換である。なぜなら

$$(\varphi - \lambda I)^* \circ (\varphi - \lambda I) = (\varphi^* - \bar{\lambda} I) \circ (\varphi - \lambda I) = \varphi^* \circ \varphi - \lambda \varphi^* - \bar{\lambda} \varphi + \lambda \bar{\lambda} I$$
$$= \varphi \circ \varphi^* - \lambda \varphi^* - \bar{\lambda} \varphi + \lambda \bar{\lambda} I = (\varphi - \lambda I) \circ (\varphi^* - \bar{\lambda} I) = (\varphi - \lambda I) \circ (\varphi - \lambda I)^*$$

従って $\left| (\varphi - \lambda I)x \right|^2 = \left| (\varphi^* - \bar{\lambda} I)x \right|^2 = 0$ 。

定理１９　　正規変換 φ の異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する。

＜証明＞ $\varphi(x) = \lambda x,\ \varphi(y) = \mu y \quad (\lambda \neq \mu)$ とする。

$$\lambda < x, y) =< \lambda x, y >=< \varphi(x), y >=< x, \varphi^*(y) >=< x, \bar{\mu} y >= \mu < x, y >$$

ゆえに $(\lambda - \mu) < x, y >= 0$ 、よって $< x, y >= 0$

定理２０　正規変換φの１つの固有空間をＦとするとき、$F^{\perp}$は$\varphi-$不変である。
＜証明＞任意の$x \in F^{\perp},\ y \in F$に対し、$<x, y>=0$なので
$<\varphi(x), y>=<x, \varphi^{*}(y)>=<x, \overline{\lambda} y>=\lambda<x, y>=0$となる。すなわち$\varphi(x) \in F^{\perp}$で
$F^{\perp}$は$\varphi-$不変である。

定理２１　正規変換φの異なる固有値を全部で$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$とし、各$\lambda_i$に対応する固有空間を
$F_i\ (i=1, \cdots, r)$とすると$E=F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$　（直和）。
＜証明＞定理１の特別な場合になる。

以上をまとめると次の定理となる。
定理２２　線形変換φについて次の３つの条件は互いに同値である。
（１）φは正規である。$\varphi^{*} \circ \varphi=\varphi \circ \varphi^{*}$
（２）$\varphi(x)=\lambda x$なら　$\varphi^{*}(x)=\overline{\lambda} x$。
（３）互いに直交する正射影の組$p_1, \cdots, p_r$が存在して、$\varphi=\lambda_1 p_1+\cdots+\lambda_r p_r$、
$I=p_1+\cdots+p_r$と表わせる。すなわちφはスペクトル分解できる。

定理２３　線形変換φがユニタリー変換であるための必要十分条件は、φが正規であって、φの固有値の絶対値が全て１であることである。
＜証明＞φがユニタリーなら正規は自明、固有値の絶対値が全て１であることを示す。

$$\varphi(x)=\lambda x \text{なら} |\lambda|^2<x, x>=\lambda \overline{\lambda}<x, x>=<\lambda x, \lambda x>=<\varphi(x), \varphi(x)>=<x, x>$$

従って、$<x, x> \neq 0$より$|\lambda|=1$である。逆にφが正規で固有値の絶対値が全て１であれば、

定理２２より$\varphi=\lambda_1 p_1+\cdots+\lambda_r p_r,\ |\lambda_i|=1\ (i=1, .., r),\quad I=p_1+\cdots+p_r$と表わせる。
従って任意のベクトルx, yについて

$$<\varphi(x), \varphi(y)>=<\sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i(x), \sum_{j=1}^{r} \lambda_j p_j(y)>=\sum_{i, j=1}^{r} \lambda_i \overline{\lambda}_j<x, p_i \circ p_j(y)>=\sum_{i=1}^{r}|\lambda_i|^2<x, p_i(y)>$$
$$=\sum_{i=1}^{r}<x, p_i(y)>=<x, \sum_{i=1}^{r} p_i(y)>=<x, y> \text{　より　ユニタリー変換。}$$

定理２４　（正規変換の極表示）　正則な正規変換φは、互いに可換な正定値エルミート変換とユニタリー変換の積として一意に表わせる。逆にそのような変換は正則な正規変換に限る。
＜証明＞

定理２２より$\varphi=\lambda_1 p_1+\cdots+\lambda_r p_r$と表わせる。各$\lambda_j$を$\lambda_j=|\lambda_j|\exp(i\theta_j)$, $i=\sqrt{-1}$と表わす。φは正則なので$\lambda_j\neq 0$。従って$h=|\lambda_1|p_1+\cdots+|\lambda_r|p_r$, $u=e^{i\theta_1}p_1+\cdots+e^{i\theta_r}p_r$と置くと、$h$と$u$は可換、$h$は正定値エルミート変換で$u$はユニタリー変換である。そして

$$h\circ u=\left(\sum_{j=1}^{r}|\lambda_j|p_j\right)\circ\left(\sum_{k=1}^{r}e^{i\theta_k}p_k\right)=\sum_{j,k=1}^{r}|\lambda_j|e^{i\theta_k}p_j\circ p_k=\sum_{j=1}^{r}|\lambda_j|e^{i\theta_j}p_j=\varphi。$$

逆に、hを正定値エルミート変換、uをユニタリー変換でhとuは可換とすると$\varphi=h\circ u$は

$$\varphi^*\circ\varphi=(h\circ u)^*\circ(h\circ u)=u^*\circ h^*\circ h\circ u=(u^*\circ u)\circ h^2=h^2$$
$$\varphi\circ\varphi^*=(h\circ u)\circ(h\circ u)^*=h\circ u\circ u^*\circ h^*=h^2 \qquad \therefore\varphi^*\circ\varphi=\varphi\circ\varphi^*$$

分解の一意性：二通りの分解$\varphi=h_1\circ u_1=h_2\circ u_2$があったとすると、$\varphi\circ\varphi^*={h_1}^2={h_2}^2$。

h_1,h_2のスペクトル分解を$h_1=\mu_1 p_1+\cdots+\mu_r p_r$, $h_2=\nu_1 q_1+\cdots+\nu_2 q_s$　$(\mu_i>0,\nu_i>0)$

とすると${h_1}^2={h_2}^2$より${\mu_1}^2 p_1+\cdots+{\mu_r}^2 p_r={\nu_1}^2 q_1+\cdots+{\nu_s}^2 q_s$、スペクトル分解の一意性から$r=s$、かつ適当に順番を読み替えると$p_i=q_i$, $\mu_i=\nu_i$。故に$h_1=h_2$、従って$u_1=u_2$。

６．５　正規変換の関数

　λの多項式$f(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots a_n$に対して、$f(\varphi)=a_0\varphi^n+a_1\varphi^{n-1}+\cdots+a_n I$とする。$\varphi$が正規変換でそのスペクトル分解が$\varphi=\lambda_1 p_1+\cdots+\lambda_r p_r$であるとき、

射影の性質より$\varphi^2={\lambda_1}^2 p_1+\cdots+{\lambda_r}^2 p_r,\ldots,\ \varphi^n={\lambda_1}^n p_1+\cdots+{\lambda_r}^n p_r$である。

これより$f(\varphi)=f(\lambda_1)p_1+\cdots+f(\lambda_r)p_r$となる。任意の連続関数$g(\lambda)$についても$g(\varphi)=g(\lambda_1)p_1+\cdots+g(\lambda_r)p_r$と定義する。ただし、関数$g(\lambda)$の定義域に固有値$\lambda_i$が全て含まれるとする。例えば$\lambda=0$を固有値に持たない$\varphi$について、$\varphi^{-1}=\frac{1}{\lambda_1}p_1+\cdots+\frac{1}{\lambda_r}p_r$。

　実は$g(\varphi)$はφの多項式で表わすことができる。すなわち$f(\lambda_i)=g(\lambda_i)$ $(i=1,2,..,r)$が成り立つ多項式$f(\lambda)$を取ってくると$g(\varphi)=\sum_{i=1}^{r}f(\lambda_i)p_i=f(\varphi)$が成り立つ。このような多項式$f(\lambda)$として、例えば$f(\lambda)=\sum_{i=1}^{r}g(\lambda_i)\frac{\prod_{j=1,(j\neq i)}^{r}(\lambda-\lambda_j)}{\prod_{j=1,(j\neq i)}^{r}(\lambda_i-\lambda_j)}$と取ればよい。

６．６　ケーリー変換

関数$z=\dfrac{1-it}{1+it}$;(tは実数)において、常に$|z|=1$である。ｔが$-\infty$から$+\infty$まで変わるときｚは$z=-1$を除く単位円周上を正の方向に一周する。逆関数は$t=\dfrac{1}{i}\times\dfrac{1-z}{1+z}$である。

この対応に相当することがエルミート変換とユニタリー変換の間に成り立つ。

定義７　　任意のエルミート変換τに対し、

(6.1)　$u=(I-i\tau)(I+i\tau)^{-1}$を$\tau$のケーリー変換という。

定理２５

（１）τのケーリー変換uはユニタリーであって、-1はuの固有値でない。そして

(6.2)　$\tau=\dfrac{1}{i}(I-u)(I+u)^{-1}$　　が成立する。

（２）逆に-1を固有値に持たない任意のユニタリー変換uに対し(6.2)でτを定義するとτはエルミート変換で、τのケーリー変換はuに等しい。

＜証明＞（１）τのスペクトル分解を$\tau=\lambda_1 p_1+\cdots+\lambda_r p_r$とすると

$u=\dfrac{1-i\lambda_1}{1+i\lambda_2}p_1+\cdots+\dfrac{1-i\lambda_r}{1+i\lambda_r}p_r$で、$\left|\dfrac{1-i\lambda_j}{1+i\lambda_j}\right|=1\quad(j=1,\cdots,r)$だから、$u$はユニタリーである。また$\dfrac{1-i\lambda_j}{1+i\lambda_j}\neq-1$だから$-1$は$u$の固有値でない。(6.1)から$\tau$を解くと(6.2)を得る。

逆に、$u=\alpha_1 p_1+\cdots+\alpha_r p_r\ \ (|\alpha_j|=1,\ \alpha_j\neq-1,\ j=1,\cdots,r)$とすると、

$\tau=\dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{1-\alpha_1}{1+\alpha_1}p_1+\cdots+\dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{1-\alpha_r}{1+\alpha_r}p_r$はその係数（固有値）$\dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{1-\alpha_j}{1+\alpha_j}$が全て実数だからエルミート変換である。(6.2)を逆に解くと(6.1)を得るのでτのケーリー変換はuである。

定理２４で正規変換の極表示$\varphi=h\circ u$が得られたが、hとuの可換性を期待しなければ、一般の線形変換についても同様な表示が得られる。

定理２６　（線形変換の極表示）

任意の線形変換φは$\varphi=u\circ h=k\circ v$　と表わすことができる。ただし、h,kは半正定値エルミート変換、u,vはユニタリー変換である。

＜証明＞φが正則の場合：　定理１７より$\varphi^*\circ\varphi$は正定値エルミート変換なので、スペク

トル分解できて$\varphi^* \circ \varphi = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_r p_r$， $I = p_1 + \cdots p_r$ （ただし$\lambda_i > 0$）と書ける。

そこで$h = \sqrt{\lambda_1} p_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_r} p_r$ と置くとhは正定値エルミート変換で$h^2 = \varphi^* \circ \varphi$ を満たす。そこで$u = \varphi \circ h^{-1}$はユニタリー変換であることを示す。実際、
$u^* \circ u = (\varphi \circ h^{-1})^* \circ (\varphi \circ h^{-1}) = (h^*)^{-1} \circ \varphi^* \circ \varphi \circ h^{-1} = h^{-1} \circ h^2 \circ h^{-1} = I$ となる。
これより$\varphi = u \circ h$が成り立つ。同様にφ^*に以上の議論を当てはめると$\varphi^* = v \circ k$
(vはユニタリー、kはエルミート)、よって$\varphi = (\varphi^*)^* = (v \circ k)^* = k^* \circ v^* = k \circ v^*$
v^*もユニタリーなので第２の式も得られた。

φが正則でない場合：　$\varphi^* \circ \varphi$は半正定値エルミートなので、$h = \sqrt{\varphi^* \circ \varphi}$ も半正定値。

よってh^{-1}が作れないので次のような工夫をする。$h(E) = F$ とおき、$E = F \oplus F^\perp$ と直和分解しておく。任意の$y \in F$ は$y = h(x)$の形にかける。xは一意ではないが、そのようなどんなxについても$\varphi(x)$は一意にきまる。なぜなら、$y = h(x_1) = h(x_2)$ とすると

$|h(x)|^2 = < h(x), h(x) > = < x, h^2(x) > = < x, \varphi^* \circ \varphi(x) > = < \varphi(x), \varphi(x) > = |\varphi(x)|^2$ より

$h(x_1 - x_2) = 0$ なので$|h(x_1 - x_2)| = |\varphi(x_1 - x_2)| = 0$。すなわち$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$が成り立つ。

そこで$u(y) = \varphi(x)$（ただし、xは$y = h(x)$を満たす元）と定義する。これはφが正則のとき$\varphi \circ h^{-1}$に相当する写像である。uは$h(E) = F$から$\varphi(E)$への線形写像であって、

$|u(y)| = |\varphi(x)| = |h(x)| = |y|$なので長さを変えない。従って$u(y) = 0$なら$y = 0$、すなわち

uは単射である。また任意の$z \in \varphi(E)$は$z = \varphi(x), x \in E$と書けるので、$y = h(x)$と置くと$z = u(y)$すなわち、uは全射である。よって$h(E) = F$と$\varphi(E)$は線形部分空間として同型である（注意：同一ではない)。そこで、残りの$h(E)^\perp$と$\varphi(E)^\perp$（これらも同型）を適当な方法で１対１、等長に対応させてやる。方法は無数にあるのでその内の１つを取ればよい。それをuとする。任意の$y \in E$に対して$y = y_1 + y_2$ $(y_1 \in h(E), y_2 \in h(E)^\perp)$と分解して

$u(y) = u(y_1) + u(y_2)$と置けば、$|u(y)|^2 = |u(y_1)|^2 + |u(y_2)|^2 = |y_1|^2 + |y_2|^2 = |y|^2$より$u$はユニタリー変換である。最後に、任意のベクトル$x$に対し、$u \circ h(x) = u(y) = \varphi(x)$となり
$\varphi = u \circ h$が成立している。$\varphi = k \circ v$の形の分解は正則な場合と同様に示せる。

定理２７　（同時対角化）
$\varphi_1, \cdots, \varphi_m$を正規変換とする。互いに直交する正射影$p_1, \cdots, p_r$によって、同時に

$\varphi_j = \lambda_{j1} p_1 + \cdots + \lambda_{jr} p_r$　$(j = 1, \cdots, m)$と表されるための必要十分条件は$\varphi_i \circ \varphi_j = \varphi_j \circ \varphi_i$

$(i,\, j = 1, \cdots, m)$

＜証明＞必要性は明らかなので十分性を示す。 $m = 2$ の場合を考える。 $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1$ とする。スペクトル分解を $\varphi_1 = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_r p_r$， $\varphi_2 = \mu_1 q_1 + \cdots + \mu_s q_s$ とする。

$p_i,\, q_j$ はそれぞれ φ_1, φ_2 の多項式で表されるので、また互いに可換である。従って、$p_i \circ q_j$ も正射影となる。そして $\varphi_1 = \lambda_1 p_1 \circ (q_1 + \cdots + q_s) + \cdots + \lambda_r p_r \circ (q_1 + \cdots + q_s)$,

$\varphi_2 = \mu_1 q_1 \circ (p_1 + \cdots + p_r) + \cdots + \mu_s q_s \circ (p_1 + \cdots + p_r)$ は正射影 $\{ p_i \circ q_j;\, i = 1,.., r,$

$j = 1,.., s\}$ による表示式である。 $p_i \circ q_j$ $(i = 1,.., r,\, j = 1,.., s)$ は互いに直交しており、

$\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{r} p_i \circ q_j = \left(\sum_{i=1}^{r} p_i \right) \circ \left(\sum_{j=1}^{s} q_j \right) = I \circ I = I$ となっている。故に $m = 2$ のとき成り立つ。

一般の場合は数学的帰納法を用いる。ここで $\varphi_j = \lambda_{j1} p_1 + \cdots + \lambda_{jr} p_r$ $(j = 1, \cdots, m)$ と表されるとき、ここに現れる λ_{jk} はすべて異なるとは限らない。

§７． 線形変換の正則関数

　複素平面のある領域Ωで一価正則な複素関数 $f(\lambda)$ (λは複素数)) を考える。

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda, \quad f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z)^{k+1}} d\lambda$ 、Ｃはｚを囲むΩ内の単一閉曲線。

定義８.

　線形空間Ｅ上の線形変換 φ 、および φ のすべての固有値を含む複素数平面上の領域Ωで一価正則な複素関数 $f(\lambda)$ が与えられたとき φ の関数 $f(\varphi)$ を次式で定義する。

$$f(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (\lambda I - \varphi)^{-1} f(\lambda) d\lambda$$ 、Ｃは φ の全ての固有値を含むΩ内の閉曲線。

定理９より $(\lambda I - \varphi)^{-1}$ の表現を使うと

$$(7.1) \quad f(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (\lambda I - \varphi)^{-1} f(\lambda) d\lambda = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{k_i} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^j} d\lambda \times (\varphi - \lambda_i I)^{j-1} \right) \circ p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{k_i} \frac{f^{(j-1)}(\lambda_i)}{(j-1)!} (\varphi - \lambda_i I)^{j-1} \right) \circ p_i$$

例６　　$f(\lambda) \equiv 1$ のとき、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C (\lambda I-\varphi)^{-1}d\lambda=\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{k_i}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{(\lambda-\lambda_i)^j}d\lambda\times(\varphi-\lambda_i I)^{j-1}\right)\circ p_i$$

$j=1$以外の項はすべて０なので　$=\sum_{i=1}^{r}p_i=I$。

例７　　$f(\lambda)\equiv\lambda$のとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C (\lambda I-\varphi)^{-1}\lambda d\lambda=\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{k_i}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\lambda}{(\lambda-\lambda_i)^j}d\lambda\times(\varphi-\lambda_i I)^{j-1}\right)\circ p_i$$

$j=1,2$以外はすべて０となり　$=\sum_{i=1}^{r}\left(\lambda_i I+(\varphi-\lambda_i I)\right)\circ p_i=\sum_{i=1}^{r}\varphi\circ p_i=\varphi$。

すなわち$\varphi=\frac{1}{2\pi i}\int_C (\lambda I-\varphi)^{-1}\lambda d\lambda$。

例８.　　$f(\lambda)\equiv\lambda^m$のとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C (\lambda I-\varphi)^{-1}\lambda^m d\lambda=\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{k_i}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\lambda^m}{(\lambda-\lambda_i)^j}d\lambda\times(\varphi-\lambda_i I)^{j-1}\right)\circ p_i$$

留数の定理より $\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\lambda^m}{(\lambda-\lambda_i)^j}d\lambda=\frac{f^{(j-1)}(\lambda_i)}{(j-1)!}=\begin{cases}\binom{m}{j-1}\lambda_i^{m-j+1} & (1\le j\le m+1)\\ 0 & (j>m+1)\end{cases}$

よって

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C (\lambda I-\varphi)^{-1}\lambda^m d\lambda=\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{m+1}\binom{m}{j-1}\lambda_i^{m-j+1}(\varphi-\lambda_i I)^{j-1}\right)\circ p_i$$
$$=\sum_{i=1}^{r}(\lambda_i I+(\varphi-\lambda_i I))^m\circ p_i=\sum_{i=1}^{r}\varphi^m\circ p_i=\varphi^m$$

例９.　　$f(\lambda)\equiv\frac{1}{\lambda}$のとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C (\lambda I-\varphi)^{-1}\frac{1}{\lambda}d\lambda=\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{k_i}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{(\lambda-\lambda_i)^j\lambda}d\lambda\times(\varphi-\lambda_i I)^{j-1}\right)\circ p_i$$

留数の定理より

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{(\lambda-\lambda_i)^j\lambda}d\lambda=\frac{f^{(j-1)}(\lambda_i)}{(j-1)!}=\binom{-1}{j-1}\lambda_i^{-j}=(-1)^{j-1}\lambda_i^{-j}\quad(j=1,2,\ldots)。$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C (\lambda I-\varphi)^{-1}\frac{1}{\lambda}d\lambda=\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{k_i}\frac{1}{\lambda_i}\left(\frac{\varphi-\lambda_i I}{-\lambda_i}\right)^{j-1}\right)\circ p_i$$
$$=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\lambda_i}(I+\frac{\varphi-\lambda_i I}{\lambda_i})^{-1}\circ p_i=\sum_{i=1}^{r}\varphi^{-1}\circ p_i=\varphi^{-1}$$

定理２８

φ の異なる固有値を $\lambda_1,\cdots\lambda_r$ とし、それらの標数を $k_i\ (i=1,\cdots r)$ とする。正則関数 $f(\lambda)$ に対しある多項式 $g(\lambda)$ が $f^{(j-1)}(\lambda_i)=g^{(j-1)}(\lambda_i)\ \ ;j=1,..,k_i\quad i=1,\cdots,r$ を満たすならば $f(\varphi)=g(\varphi)$ である。

＜証明＞

十分性は上の表現定理より明らかである。必要性すなわち $f(\varphi)=g(\varphi)$ （ｇは多項式）ならば $f^{(j-1)}(\lambda_i)=g^{(j-1)}(\lambda_i)\ \ ;j=1,..,k_i\quad i=1,\cdots,r$ であることを示す。式(7.1)で p_i は φ の多項式であり、 $f^{(j-1)}(\lambda_j)$ は数なので(7.1)の右辺は φ の多項式である。従って、 $f(\varphi)=P(\varphi)$ となる λ の多項式 $P(\lambda)$ が存在する。ｎ次の多項式 $g(\lambda)$ を $\lambda=\lambda_i$ の周りにテーラー展開すると $g(\lambda)=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{g^{(j-1)}(\lambda_i)}{(j-1)!}(\lambda-\lambda_j)^{j-1}$ 。(7.1)より $x\in G_i$ のとき $g(\varphi)(x)=\sum_{j=1}^{k_i}\frac{g^{(j-1)}(\lambda_i)}{(j-1)!}(\varphi-\lambda_i I)^{j-1}(x)$ 。故に $f(\varphi)=g(\varphi)$ ならば $x\in G_i$ について $f(\varphi)(x)=g(\varphi)(x)$ が成り立つ。$(\varphi-\lambda_i I)^{k_i-1}(x)\neq 0$ となる $x\in G_i$ が存在し $x,(\varphi-\lambda_i I)(x),\cdots,\ (\varphi-\lambda_i I)^{k_i-1}(x)$ は一次独立。よって $f^{(j-1)}(\lambda_i)=g^{(j-1)}(\lambda_i)$ が $j=1,..,k_i$ について成り立つ。i は任意なので $i=1,2,...,r$ について成り立つ。

系 28-1

（１） $f(\varphi)$ の固有値は重複度も含めて $f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_r)$ である。

（２） $f(\lambda_i)$ に対応する一般固有空間は λ_i に対応する一般固有空間に等しい。

＜証明＞

（１） $\varphi(x)=\lambda_i x$ ならば $f(\varphi)(x)=f(\lambda_i)x$ より $f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_r)$ は $f(\varphi)$ の固有値。

(7.1)より

$$f(\varphi)=\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{k_i}\frac{f^{(j-1)}(\lambda_i)}{(j-1)!}(\varphi-\lambda_i I)^{j-1}\right)\circ p_i=\sum_{i=1}^{r}\left[f(\lambda_i)+\sum_{j=2}^{k_i}\frac{f^{(j-1)}(\lambda_i)}{(j-1)!}(\varphi-\lambda_i I)^{j-1}\right]\circ p_i$$

$f(\varphi)(x)=\lambda x$ ならば $x=\sum_{i=1}^{r}x_i\in G_1\oplus\cdots\oplus G_r$ とすると $p_i(x_i)=x_i$ なので上式より

$\sum_{i=1}^{r}\left[f(\lambda_i)x_i+\sum_{j=2}^{k_i}\frac{f^{(j-1)}(\lambda_i)}{(j-1)!}(\varphi-\lambda_i I)^{j-1}(x_i)\right]=\sum_{i=1}^{r}\lambda x_i$ 、これより全てのｉについて

$f(\lambda_i)x_i+\sum_{j=2}^{k_i}\frac{f^{(j-1)}(\lambda_i)}{(j-1)!}(\varphi-\lambda_i)^{j-1}(x_i)=\sum_{i=1}^{r}\lambda x_i$ 。$(\varphi-\lambda_i I)^{p-1}(x_i)\neq 0,\ (\varphi-\lambda_i I)^{p}(x)=0$

（ただし $p\leq k_i$）とすると $x_i,\ (\varphi-\lambda_i I)(x_i),\ldots.,(\varphi-\lambda_i I)^{p-1}(x_i)$ は一次独立なので $x_i=0$

または、$x_i\neq 0$ かつ $f(\lambda_i)=\lambda,\ \ f^{(j-1)}(\lambda_i)(\varphi-\lambda_i)^{j-1}(x_i)=0\ \ (j\geq 2)$。従って $f(\lambda)$ が定数関数でなければ固有値は重複度まで含めて $\{\lambda=f(\lambda_i); i=1,..,r\}$ である。

（２）λ_i に対する φ の一般固有空間を G_i、$f(\lambda_i)$ に対応する $f(\varphi)$ の一般固有空間を H_i $(i=1,2,\ldots,r)$ とすると

$$(f(\varphi)-f(\lambda_i)I)^{k_i}(x)=(g(\varphi)-g(\lambda_i)I)^{k_i}(x)=\left\{\sum_{m=1}^{n}a_m(\varphi^m-\lambda_i{}^m I)\right\}^{k_i}(x)$$

$$=\left\{\sum_{m=1}^{n}a_m\left(\sum_{j=0}^{m-1}\lambda_i{}^j\varphi^{m-j-1}\right)\circ(\varphi-\lambda_i I)\right\}^{k_i}(x)$$

$$=\left\{\sum_{m=1}^{n}a_m\left(\sum_{j=0}^{m-1}\lambda_i{}^j\varphi^{m-j-1}\right)\right\}^{k_i}\circ(\varphi-\lambda_i I)^{k_i}(x)=0$$

従って、$G_i\subseteq H_i$。ところが $E=G_1\oplus\cdots\oplus G_r\subseteq H_1\oplus\cdots\oplus H_r=E$ なので
すべてのｉについて $G_i=H_i$ が成り立つ。

系 28-2

（１）$f(\varphi)$ の固有値 $f(\lambda_i)$ の標数は λ_i の標数と一致しない。

（２）$f(\lambda)$ が φ にとって可逆変換、すなわち $g(f(\varphi))=\varphi$ を満たす正則関数 $g(\lambda)$ が存在するならば λ_i の標数と $f(\lambda_i)$ の標数は一致する。

＜証明＞（１）例えば $f(\lambda)\equiv 1$ とすると、、どんな線形変換 φ を取っても $f(\lambda_i)=1$ で H_i の区別がなく、Ｅの全ての元が固有ベクトルとなる。

（２） 系 28-1（２）の証明から分かるように、$f(\lambda_i)$ の標数は λ_i の標数を越えない。

$f(\lambda_i)=\mu_i,\ g(\mu_i)=\lambda_i$ なので、$\lambda_i = g(\mu_i)$の標数 $\le \mu_i = f(\lambda_i)$の標数 $\le \lambda_i$の標数 より
$\mu_i = f(\lambda_i)$の標数 $=\lambda_i$の標数 。

例１０．　φ が正則なら、$\log\varphi$ が定義できて、$\exp(\log\varphi)=\varphi$ となる。ただし

$$\exp(\psi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}(\lambda I-\psi)^{-1}e^{\lambda}d\lambda,\quad \log\varphi=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}(\lambda I-\varphi)^{-1}\log\lambda\, d\lambda\text{。}$$

C_1 は ψ の全ての固有値を含む閉曲線、C_2 は φ の全ての固有値を含む閉曲線である。

$f(\lambda)$ が $\lambda=0$ の周りで正則のとき、整級数展開を $f(\lambda)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ とし、収束半径を ρ とする。

定理２９
線形変換 φ の全ての固有値の絶対値が ρ より小さいとき、

$f(\varphi)=a_0I+a_1\varphi+a_2\varphi^2+\cdots+a_n\varphi^n+\cdots$ が成立する。また、φ の固有値のうち１つでも絶対値が ρ を超えるときは上式は意味を持たない。
（意味：どのようなベクトル x に対しても $n\to\infty$ のとき

$$\left|f(\varphi)(x)-\{a_0x+a_1\varphi(x)+\cdots a_n\varphi^n(x)\}\right|\to 0$$ が成立することである。）

＜証明＞　φ の全ての固有値の絶対値が ρ より小さいときは、収束円 $|\lambda|<\rho$ の内部に φ の固有値を全て囲む単一閉曲線Ｃが取れる。よって

$$f(\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int_C(\lambda I-\varphi)^{-1}f(\lambda)d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_C(\lambda I-\varphi)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\lambda^k\right)d\lambda$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{1}{2\pi i}\int_C(\lambda I-\varphi)^{-1}\lambda^k d\lambda=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\varphi^k$$

系 29-1　$f(\lambda)$ の $\lambda=\lambda_0$ の周りの整級数展開を　$f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\lambda-\lambda_0)^k$ （収束半径 ρ ）
とする。線形変換 φ の全ての固有値が収束円の内部に入るならば $f(\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\varphi-\lambda_0I)^k$ が成立する。固有値が１つでも収束円の外にあると成り立たない。

定理３０　　（射影と留数の関係）

φ の一つの固有値を λ_ν とすると、$\underset{\lambda=\lambda_\nu}{\mathrm{Re}\,s}(\lambda I-\varphi)^{-1}f(\lambda)=f(\varphi)\circ p_\nu \quad (\nu=1,2,..,r)$

＜証明＞　φ の固有値のうち λ_ν だけを囲む閉曲線 C_ν を取ると

$$\begin{aligned}\underset{\lambda=\lambda_\nu}{\mathrm{Re}\,s}(\lambda I-\varphi)^{-1}f(\lambda)&=\sum_{i=1}^{r}\Big(\sum_{j=1}^{k_i}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\nu}\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^j}d\lambda\times(\varphi-\lambda_i I)^{j-1}\Big)\circ p_i\\&=\Big(\sum_{j=1}^{k_\nu}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\nu}\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_\nu)^j}d\lambda\times(\varphi-\lambda_\nu I)^{j-1}\Big)\circ p_\nu\end{aligned}$$

他方 $f(\varphi)$ の定義式(7.1)の両辺に p_ν を作用させると

$$f(\varphi)\circ p_\nu=\Big(\sum_{j=1}^{k_\nu}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\nu}\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_\nu)^j}d\lambda\times(\varphi-\lambda_\nu I)^{j-1}\Big)\circ p_\nu。$$

系 30-1　φ の固有値 λ_ν のみを囲む単一閉曲線 C_ν を取ると定理９式(5.1)より

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\nu}(\lambda I-\varphi)^{-1}d\lambda=p_\nu \quad (\nu=1,2,..,r)$$ なので留数公式より

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C}(\lambda I-\varphi)^{-1}d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}(\lambda I-\varphi)^{-1}d\lambda+\cdots\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}(\lambda I-\varphi)^{-1}d\lambda$$

これは例　　より φ のスペクトル分解の射影の和の式 $I=p_1+\cdots+p_r$ を意味する。

付録Ａ　　線形写像・基底・座標変換・表現行列

定理Ａ　（線形写像の次元定理）

　線形写像 φ ：線形空間 $E\to F$ 　のとき　$\dim E=\dim\varphi^{-1}(0)+\dim\varphi(E)$。

＜証明＞$\dim\varphi^{-1}(0)=k$ とし、部分空間 $\varphi^{-1}(0)$ の基底を $e_1,\cdots,e_k$ とする。

それに付け加えてＥ全体の基底となるように $e_{k+1},\cdots,e_n$ を選ぶ。ただし $n=\dim E$ 。

このとき $\varphi(e_{k+1}),\cdots,\varphi(e_n)$ は線形独立である。なぜなら $c_{k+1}\varphi(e_{k+1})+\cdots+c_n\varphi(e_n)=0$

とすると $\varphi(c_{k+1}e_{k+1}+\cdots+c_ne_n)=0$ 。よって $c_{k+1}e_{k+1}+\cdots+c_ne_n\in\varphi^{-1}(0)$ 、これより

$c_{k+1}=\cdots=c_n=0$ となる。任意の $x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n\in E$ について

$\varphi(x)=x_{k+1}\varphi(e_{k+1})+\cdots+x_n\varphi(e_n)$ なので $\dim\varphi(E)=n-k=\dim E-\dim\varphi^{-1}(0)$。

線形写像 φ ： $E^m\to E^n$ 　（ユークリッド線形空間）

E^m の基底を $\{e_1,\cdots,e_m\}$ 、E^n の基底を $\{f_1,\cdots,f_n\}$ とする。

$\varphi(e_i)=\sum_{j=1}^{n} a_{ji} f_j \quad (i=1,..,m)$ とすると

$$(\varphi(e_1),\cdots,\varphi(e_m))=(f_1,\cdots,f_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=(f_1,\cdots,f_n)A \text{。} \tag{A.1}$$

$x=(e_1,\cdots,e_m)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\in E_m$ に対して $\varphi(x)=y=(f_1,\cdots,f_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ とすると

$$(f_1,\cdots,f_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\varphi(x)=(\varphi(e_1),\cdots,\varphi(e_m))\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}=(f_1,\cdots,f_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

これより $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$、$\varphi$ の表現行列は A である。

別の E^m の基底を $\{\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_m\}$、$E^n$ の基底を $\{\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_n\}$、$\varphi$ の表現行列を B とする。

基底の変換行列をそれぞれ P,Q とする。すなわち

$$(e_1,\cdots,e_m)=(\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_m)P,\ (f_1,\cdots,f_n)=(\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_n)Q \tag{A.3}$$

とする。P は $m\times m$、Q は $n\times n$ 行列である。

$x=(\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_m)\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_m \end{pmatrix}\in E_m$ に対して $\varphi(x)=y=(\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_n)\begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix}$ とすると、φ の表現行列が

B なので、$(\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_n)\begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix}=\varphi(x)=(\varphi(\tilde{e}_1),\cdots,\varphi(\tilde{e}_m))\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_m \end{pmatrix}=(\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_n)B\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_m \end{pmatrix}$。(A.4)

基底の変換より $(e_1,\cdots,e_m)P^{-1}=(\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_m)$、$(f_1,\cdots,f_n)Q^{-1}=(\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_n)$ なので

$$(f_1,\cdots,f_n)Q^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\ \vdots\\ \tilde{y}_n\end{pmatrix}=(f_1,\cdots,f_n)Q^{-1}B\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \vdots\\ \tilde{x}_m\end{pmatrix} \tag{A.5}$$

また座標変換については

$$x=(e_1,\cdots,e_m)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}=(\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_m)P\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}=(\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n)\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \vdots\\ \tilde{x}_m\end{pmatrix}\in E^m \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \vdots\\ \tilde{x}_m\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}, \text{同様に}\begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\ \vdots\\ \tilde{y}_n\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\text{。} \tag{A.6}$$

(A.5)に以上の座標変換(A.6)を代入すると $(f_1,\cdots,f_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=(f_1,\cdots,f_n)Q^{-1}BP\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}$

これを(A.2)と比較すると $A=Q^{-1}BP$　（逆に $B=QAP^{-1}$）という関係式を得る。

付録Ｂ　　射影作用素

直和分解 $E=F_1\oplus\cdots\oplus F_r$ に付随する射影作用素

任意の $x\in E$ は $x=x_1+\cdots+x_r$　$(x_i\in F_i)$ と一意に表わされる。 $x_i=p_i(x)$

$p_1,\cdots,p_r$ を直和分解 $E=F_1\oplus\cdots\oplus F_r$ に付随する射影作用素と言う。

（１） $p_i(E)=F_i$　$(i=1,\cdots,r)$、　$I=p_1+\cdots+p_r$

（２） $p_i\circ p_i=p_i$　$(i=1,\cdots,r)$、　$p_i\circ p_j=0$　$(i\neq j)$

定理Ｂ：　Ｅ上の線形変換 p がＥのある直和分解に付随する射影の一員であるための必要十分条件は $p\circ p=p$ が成り立つことである。このとき $E=p(E)\oplus p^{-1}(0)$ がその直和分解である。

付録Ｃ　　対称変換・直交変換

Ｅ：実ユークリッド線形空間

○　内積：実数 $<x,y>,\ x,y\in E$

①$<x_1+x_2,y>=<x_1,y>+<x_2,y>$　,　$<\lambda x,y>=\lambda<x,y>$　　（線形性）

②$<x,y>=<y,x>$　　（可換性）

③$<x,x>\geq 0,\quad <x,x>=0\Leftrightarrow x=0$　　（正値性）

$x \perp y \Leftrightarrow < x, y >= 0$　　；　　$|x| = \sqrt{< x, x >}$　ベクトル x の長さ

○Ｅの正規直交系 $\{e_1, \cdots, e_m\} \Leftrightarrow E = [e_1, \cdots, e_n]$, $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$　$\dim E = n$

$\Im_\varphi = \{A;\ A$ はＥの正規直交基底によって φ に対応している行列$\}$

定義（対称変換）：　Ｅ上の線形変換 φ が対称である $\Leftrightarrow < \varphi(x), y >=< x, \varphi(y) >$　$x, y \in E$

定理 C-1：　対称変換 φ に対する $\Im_\varphi$ の元は全て対称行列 ${}^t A = A$ である。

＜証明＞　正規直交基底を取ると
$< \varphi(x), y >= {}^t(Ax)y = {}^t x {}^t Ay,\quad < x, \varphi(y) >= {}^t xAy$ 、よって ${}^t A = A$

定理 C-2：　対称変換の固有値はすべて実数である。
＜証明＞固有方程式の解の１つを λ_0, 対応する固有ベクトルを x とする。ただし、λ_0, x は一般に複素数である。 $Ax = \lambda_0 x$ より　${}^t \bar{x}Ax = \lambda_0 \bar{x}x = \lambda_0 |x|^2$ 。両辺の転置複素共役を取ると ${}^t \overline{A} = A$ なので $\overline{\lambda}_0 |x|^2 = {}^t \bar{x} {}^t \overline{A} x = {}^t \bar{x}Ax = \lambda_0 |x|^2$ 、よって $\lambda = \overline{\lambda}$ すなわち実数である。

定義（直交変換）：　Ｅ上の線形変換 φ が回転（直交変換）である

$$\Leftrightarrow < \varphi(x), \varphi(y) >=< x, y > \quad x, y \in E$$

定理 C-3: 回転 φ に対する $\Im_\varphi$ の元は、全て直交行列である。

＜証明＞１つの正規直交系 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ を取り、これに対する φ の表現行列を

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$ とすると、$(\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_m)) = (e_1, \cdots, e_m)A$ 。任意の i, j について

$< \varphi(e_i), \varphi(e_j) >=< e_i, e_j >= \delta_{ij}$ 、これより

$\delta_{ij} =< \varphi(e_i), \varphi(e_j) >=< \sum_{p=1}^{m} a_{pi} e_p, \sum_{q=1}^{m} a_{qi} e_q >= \sum_{p=1}^{m} a_{pi} a_{pj}$ 、すなわち ${}^t AA = I$ であり
行列 A は直交行列である。

注意：正規直交系では対称変換の表現行列は対称行列となるが、一般の基底では対称性は

保障されない。正規直交系$\{e_1,\cdots,e_m\}$での表現行列をA、直交行列でない正則行列Ｐで変換した基底を $(f_1,\cdots,f_n)=(e_1,\cdots,e_n)P$ とし、この基底に付随する表現行列をＢとすると$B=PAP^{-1}$、このとき${}^tB={}^t(PAP^{-1})=({}^tP)^{-1}({}^tA)({}^tP)=({}^tP)^{-1}A({}^tP)\neq B$である。一般にＢが対称になるのは${}^tP=P^{-1}$、すなわち直交行列のときである。

付録Ｄ　応用１：線形微分方程式

連立線形定数係数微分方程式　　$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$

(D-1) $\dfrac{d}{dt}x_k(t)=a_{k1}x_1+\cdots+a_{kn}x_n\quad(k=1,2,\cdots,n)$，初期条件　$x_i(0)=x_i{}^0\quad(i=1,\cdots,n)$。

$x(t)={}^t(x_1(t),\cdots,x_n(t)),\quad x_0={}^t(x_1{}^0,\cdots,x_n{}^0),\quad A=(a_{kj})$とすると

(D-2)　$\dfrac{d}{dt}x=Ax,\quad x(0)=x^0$　　　解は　$x(t)=\exp[At]x_0$

ただし　$\exp[At]=I+\dfrac{t}{1!}A+\dfrac{t^2}{2!}A^2+\cdots+\dfrac{t^n}{n!}A^n+\cdots$。

しかし、実際には$\exp[At]$は§７の線形変換の指数関数によって

$$\exp[At]=\sum_{i=1}^{r}\exp(\lambda_i t)\left\{I+\frac{t}{1!}(A-\lambda_i I)+\frac{t^2}{2!}(A-\lambda_i I)^2+\cdots+\frac{t^{k_i-1}}{(k_i-1)!}(A-\lambda_i I)^{k_i-1}\right\}P_i$$

と表現できる。

（例）$x={}^t(x,y,z),\quad \dfrac{dx}{dt}=Ax,\quad x(0)=x_0={}^t(x_0,y_0,z_0)$，$A=\begin{bmatrix}4&-1&-2\\9&-2&-7\\-3&1&3\end{bmatrix}$。

$\det(A-\lambda I)=-(\lambda-1)(\lambda-2)^2$,　固有値　$\lambda=1,\ 2$

$$A-I=\begin{bmatrix}3&-1&-2\\9&-3&-7\\-3&1&2\end{bmatrix},\ A-2I=\begin{bmatrix}2&-1&-2\\9&-4&-7\\-3&1&1\end{bmatrix},\ (A-2I)^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\3&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}$$

従って$\lambda=1$の標数は１、$\lambda=2$の標数は２である。最小多項式は$\Psi(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

よって$\dfrac{1}{(\lambda-1)(\lambda-2)^2}=\dfrac{1}{\lambda-1}+\dfrac{3-\lambda}{(\lambda-2)^2}$より$1=(\lambda-2)^2+(3-\lambda)(\lambda-1)$。

$$P_1=(A-2I)^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\3&0&3\\0&0&0\end{bmatrix},\quad P_2=(3I-A)(A-I)=\begin{bmatrix}0&0&-1\\-3&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}$$ 。従って、

$$\exp[At]=e^tP_1+e^{2t}\left\{I+\frac{t}{1!}(A-2I)\right\}P_2$$
$$=e^t\begin{bmatrix}1&0&1\\3&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}+e^{2t}\begin{bmatrix}0&0&-1\\-3&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}+te^{2t}\begin{bmatrix}3&-1&-1\\12&-4&-4\\-3&1&1\end{bmatrix}$$

応用２：線形差分方程式

漸化式 $x_{n+k}=a_1x_n+a_2x_{n+1}+\cdots+a_kx_{n+k-1}$，ただし $(x_0,x_1,\cdots,x_{k-1})$ は初期条件として与える。

$x_n^{(0)}=x_n$ とし、以下 $x_n^{(1)},x_n^{(2)},\cdots,x_n^{(k-1)}$ を帰納的に次の様に定義する。

$$x_n^{(1)}=x_{n+1}=x_{n+1}^{(0)},\ x_n^{(2)}=x_{n+2}=x_{n+1}^{(1)},\ x_n^{(3)}=x_{n+3}=x_{n+1}^{(2)},\ \cdots\ ,\ x_n^{(k-1)}=x_{n+k-1}=x_{n+1}^{(k-2)}$$

最後に漸化式より

$$x_n^{(k)}=x_{n+k}=a_1x_n+a_2x_{n+1}+\cdots+a_kx_{n+k-1}=a_1x_n^{(0)}+a_2x_n^{(1)}+\cdots+a_kx_n^{(k-1)}$$

そこで k 次元ベクトル　$\vec{y}_n={}^t(x_n^{(0)},x_n^{(1)},\cdots,x_n^{(k-1)}),\ n=0,1,2,...$ とすると

$$\vec{y}_{n+1}=\begin{pmatrix}x_{n+1}^{(0)}\\x_{n+1}^{(1)}\\\vdots\\x_{n+1}^{(k-2)}\\x_{n+1}^{(k-1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_n^{(1)}\\x_n^{(2)}\\\vdots\\x_n^{(k-1)}\\x_n^{(k)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n^{(0)}\\x_n^{(1)}\\\vdots\\x_n^{(k-2)}\\x_n^{(k-1)}\end{pmatrix}=A\vec{y}_n$$ と表わされる。

すなわち、$\vec{y}_{n+1}=A\vec{y}_n$，$\vec{y}_0={}^t(x_0,\cdots,x_{k-1})$　ただし $A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\\0&0&0&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_k\end{bmatrix}$、

これより、$\vec{y}_n=A^n\vec{y}_0$。従って行列Ａの n 上の計算に帰着される。A^n を計算するには行列

Aを一般スペクトル分解して

$A = S + N = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i + \sum_{i=1}^{r} (A - \lambda_i I) P_i$ 、(S は半単純、 N はベキ零) とすると二項定理より

$$A^n = \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i \right)^n + \binom{n}{1} \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i \right)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{r} (A - \lambda_i I) P_i \right) + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{r} (A - \lambda_i I) P_i \right)^n$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i{}^n P_i + \binom{n}{1} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i{}^{n-1} (A - \lambda_i I) P_i + \cdots + \binom{n}{m-1} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i{}^{n-m+1} (A - \lambda_i I)^{m-1} P_i$$

ただし、 $m = \max(k_1, k_2, \cdots, k_r)$ は固有値の標数の最大値。