母関数、分布の再生性

$$M_X(t)=\begin{cases} E[t^X]=\sum_k t^k P(X=k) & \text{(階乗モーメント母関数)　離散型} \\ E[\exp(tX)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(tx)f(x)dx & \text{(モーメント母関数)　連続型}\end{cases}$$

①　離散型　$\lim_{t\to1}\frac{d^n}{dt^n}E[t^X]=\lim_{t\to1}E[\frac{d^n}{dt^n}t^X]=\lim_{t\to1}E[X(X-1)...(X-n+1)t^{X-n}]$

$=E[X(X-1)(X-2).....(X-n+1)]$　　階乗モーメント

連続型　$\lim_{t\to0}\frac{d^n}{dt^n}E[\exp(tX)]=\lim_{t\to0}E[\frac{d^n}{dt^n}\exp(tX)]=\lim_{t\to0}E[X^n\exp(tX)]=E[X^n]$

これより平均μ、分散σ^2は次のように求まる。

離散型：$\mu=E[X]=\lim_{t\to1}\frac{d}{dt}M_X(t),\quad \sigma^2=E[X^2]-\mu^2=\lim_{t\to1}\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)+\mu-\mu^2$

連続型：$\mu=E[X]=\lim_{t\to0}\frac{d}{dt}M_X(t),\quad \sigma^2=E[X^2]-\mu^2=\lim_{t\to0}\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)-\mu^2$

② X,Y が独立な確率変数のとき、$X+Y$ のモーメント母関数は

$M_{X+Y}(t)=E[\exp(t(X+Y))]=E[\exp(tX)\exp(tY)]=E[\exp(tX)]E[\exp(tY)]$

$=M_X(t)M_Y(t)$　　積になる

● 離散型分布の階乗モーメント母関数

（１）二項分布　$Bi(n,p)$

分布関数　$f(x)={}_nC_x p^x q^{n-x}\quad (x=0,1,2,...,n)$

母関数　$M_X(t)=\sum_{x=0}^{n}t^x\times{}_nC_x p^x q^{n-x}=\sum_{x=0}^{n}{}_nC_x(pt)^x q^{n-x}=(pt+q)^n$

① $\mu=np,\quad \sigma^2=npq$

② X,Y が独立でそれぞれ二項分布 $Bi(n,p),\ Bi(m,p)$ に従うとき、$X+Y$ は $Bi(n+m,p)$ に従う。　$M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)=(pt+q)^{n+m}$　　二項分布の再生性

（２）ポアソン分布　$P(\lambda)$

分布関数　$f(x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}\quad (x=0,1,2,...)$

母関数　$M_X(t)=\sum_{x=0}^{\infty}t^x\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}=\{\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^x}{x!}\}e^{-\lambda}=\exp\{\lambda(t-1)\}$

① $\mu=\sigma^2=\lambda$

②独立な確率変数 X,Y がそれぞれ $Po(\lambda_1),Po(\lambda_2)$ に従うとき、$X+Y$ は $Po(\lambda_1+\lambda_2)$ に従う。　$M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)=\exp\{(\lambda_1+\lambda_2)(t-1)\}$　　分布の再生性

（３）幾何分布　$G(p)$（初めての成功が出現するまでの失敗の回数の分布）

$f(x)=pq^x\quad (x=0,1,2,3....)\quad p+q=1$

母関数 $M_X(t)=\sum_{x=0}^{\infty}t^x\times pq^x=p\sum_{x=1}^{\infty}(qt)^{x-1}=\frac{p}{1-qt}$

① $\mu=\frac{q}{p},\quad \sigma^2=\frac{q}{p^2}$

分布の再生性はない。再生性は次の負の二項分布で成立する。

（４）負の二項分布　$NB(k,p)$（ｋ回の成功が出現するまでの失敗の回数の分布）

$f(x)={}_kH_x p^k q^x={}_{k+x-1}C_x p^k q^x\quad (x=0,1,2,...)$　　（${}_kH_x$ は重複組み合わせ）

ｋ＝１のときは幾何分布になる。$NB(1,p)=G(p)$

母関数　$M_X(t)=\sum_{x=0}^{\infty}t^x\times{}_kH_x p^k q^x=(\frac{p}{1-qt})^k$

（証明）$\sum_{x=0}^{\infty}{}_kH_x s^x=(1-s)^{-k}$ を示せば $s=qt$ と置けば上式を得る。

$(1-s)^{-1}=1+s+s^2+.......=\sum_{x=0}^{\infty}s^x$ の両辺をｓに関してｋ回微分すると

$(k-1)!\times(1-s)^{-k}=\sum_{x=k}^{\infty}x(x-1)(x-2)...(x-k+1)s^{x-k}$

$x-k=y$ とすると

$(1-s)^{-k}=\sum_{y=0}^{\infty}\frac{(y+k)(y+k-1)....(y+1)}{(k-1)!}s^y=\sum_{y=0}^{\infty}{}_kH_y s^y$　　が成り立つ。

① $\mu=\frac{kq}{p},\quad \sigma^2=\frac{kq}{p^2}$

②独立な確率変数 X,Y がそれぞれ $NB(k,p),NB(m,p)$ に従うとき、$X+Y$ は $NB(k+m,p)$ に従う。　$M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)=(\frac{pt}{1-qt})^{k+m}$　　分布の再生性

●連続型分布のモーメント母関数

（５）指数分布　　$Exp(\lambda)$

確率分布密度　$f(x)=\lambda\exp(-\lambda x)\quad (x\ge 0)$

$P(X>x)=\exp(-\lambda x)$

母関数
$$M_X(t)=\int_0^\infty \exp(tx)\times\lambda\exp(-\lambda x)dx=\lambda\int_0^\infty \exp[-(\lambda-t)x]dx$$
$$=\frac{\lambda}{\lambda-t}\qquad (\lambda\ge t\ge 0)$$

① $\mu=\dfrac{1}{\lambda},\quad \sigma^2=\dfrac{1}{\lambda^2}$

分布の再生性はない。再生性は次のガンマ分布で成立する。

（６）ガンマ分布　　$Ga(\alpha,\lambda)$

分布密度　$f(x)=\dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\quad (x\ge 0)$

ただしα＞0、　$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy$　,$\Gamma(n)=(n-1)!$　(nは自然数）

母関数
$$M_X(t)=\int_0^\infty e^{tx}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}\exp\{-(\lambda-t)x\}dx\qquad ((\lambda-t)x=y)$$
$$=(\frac{\lambda}{\lambda-t})^\alpha\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy=(\frac{\lambda}{\lambda-t})^\alpha\qquad \text{ただし }\lambda\ge t$$

① $\mu=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{d}{dt}(\dfrac{\lambda}{\lambda-t})^\alpha=\lim\limits_{t\to 0}\alpha(\dfrac{\lambda}{\lambda-t})^{\alpha-1}\times\dfrac{\lambda}{(\lambda-t)^2}=\dfrac{\alpha}{\lambda}$、

$$\sigma^2=\lim_{t\to 0}\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\lambda}{\lambda-t})^\alpha-(\frac{\alpha}{\lambda})^2=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha(\alpha+1)\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^{\alpha+2}}-(\frac{\alpha}{\lambda})^2=\frac{\alpha}{\lambda^2}$$

② X,Yが独立なガンマ分布$Ga(\alpha_1,\lambda),Ga(\alpha_2,\lambda)$にそれぞれ従うとき、$X+Y$は$Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$に従う。（注意：パラメーター　λが共通でなくてはならない）

$$M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)=(\frac{\lambda}{\lambda-t})^{\alpha_1}(\frac{\lambda}{\lambda-t})^{\alpha_2}=(\frac{\lambda}{\lambda-t})^{\alpha_1+\alpha_2}$$

	離散型		連続型
初めて起こる	幾何分布	$\Leftrightarrow$	指数分布
	$\Downarrow$		$\Downarrow$
k 回起こる	負の二項分布	$\Leftrightarrow$	ガンマ分布

（７）正規分布　$N(\mu,\sigma^2)$

分布密度関数　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$

母関数
$$M_X(t)=\int_{-\infty}^\infty e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^\infty\exp\{-\frac{(x-\mu-t\sigma^2)}{2\sigma^2}\}dx\times\exp\{\frac{1}{2}t^2\sigma^2+t\mu\}=\exp\{\frac{1}{2}\sigma^2t^2+\mu t\}$$

①　平均μ、　分散σ^2

②　独立な確率変数X,Yがそれぞれ$N(\mu_1,\sigma_1{}^2),\ N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$に従うとき、$X+Y$は

$N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2)$に従う。　　分布の再生性

$$M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)=\exp\{\frac{1}{2}\sigma_1{}^2t^2+\mu_1t\}\times\exp\{\frac{1}{2}\sigma_2{}^2t^2+\mu_2t\}$$
$$=\exp\{\frac{1}{2}(\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2)t^2+(\mu_1+\mu_2)t\}$$