アーベル型定理とタウバー型定理（ラプラス変換）

$F(x): x \geq 0$ で定義された右連続 $F(x+0) = F(x)$、単調非減少関数

$x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$ である。さらに、ラプラス変換　$\varphi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x)$

（スチェルチェス積分（付録１参照））が $\lambda \geq 0$ で存在するものとする。
以上の条件の下で、$F(x)$ の $x \to \infty\ (0)$ の挙動と $\varphi(\lambda)$ の $\lambda \to 0(\infty)$ での挙動の関係について述べたのがアーベル型定理、タウバー型定理である。いづれの場合も同様であるが、ここでは $F(x)$ の $x \to \infty$ の挙動と $\varphi(\lambda)$ の $\lambda \to 0$ での挙動の関係を示すアーベル型定理とタウバー型定理について述べることにする。

[1]アーベル型定理

１．$F(x) = x^\alpha,\ \alpha > 0$ のとき、$\varphi(\lambda) = \Gamma(\alpha+1)\lambda^{-\alpha}$、　ただし $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$。

（証明）$\varphi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx^\alpha = \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \alpha \lambda^{-\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$　、ただし $t = \lambda x$。

$$= \alpha \Gamma(\alpha) \lambda^{-\alpha} = \Gamma(\alpha+1)\lambda^{-\alpha}。$$

２．$A > 0, \alpha > 0$ の定数、$F(x) \sim Ax^\alpha\ \ (x \to \infty)$ のとき、$\varphi(\lambda) \sim \Gamma(\alpha+1) A \lambda^{-\alpha}\ \ (\lambda \to 0)$。

ここで　$f(t) \sim g(t)\ \ (t \to a)$ とは $\lim_{t \to a} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$ のことである。

（証明）$F(x) \sim Ax^\alpha\ \ (x \to \infty)$ より $A_1 < A < A_2$ を満たす任意の正数 A_1, A_2 に対して、
K を十分大きく取ると、$x \geq K \Rightarrow A_1 x^\alpha < F(x) < A_2 x^\alpha$ とできる。
ラプラス変換 $\varphi(\lambda)$ の $x < K$ での積分は

$\int_0^K e^{-\lambda x} dF(x) \leq \int_0^K dF(x) = F(K) - F(0) < \infty$ （λに無関係）。

$x \geq K$ での積分は部分積分により

$$\int_K^\infty e^{-\lambda x} dF(x) = \left[e^{-\lambda x} F(x)\right]_K^\infty + \lambda \int_K^\infty e^{-\lambda x} F(x) dx = -e^{-\lambda x} F(K) + \lambda \int_K^\infty e^{-\lambda x} F(x) dx$$

第１項の $-e^{-\lambda x} F(K)$ は $\lambda \to 0$ のとき有界である。第２項は先ほどの不等式より

$$\lambda \int_K^\infty e^{-\lambda x} A_1 x^\alpha dx \leq \lambda \int_K^\infty e^{-\lambda x} F(x) dx \leq \lambda \int_K^\infty e^{-\lambda x} A_2 x^\alpha dx \tag{1.1}$$

ここで $\lambda x = t$ とすると、$\lambda \int_K^\infty e^{-\lambda x} x^\alpha dx = \lambda^{-\alpha} \int_{\lambda K}^\infty e^{-t} t^\alpha dt \sim \lambda^{-\alpha} \Gamma(\alpha+1)\ \ (\lambda \to 0)$　(1.2)

従って、$\varphi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x)$ の $\lambda \to 0$ のときの挙動を支配するのは $\lambda \int_K^\infty e^{-\lambda x} dF(x)$ の項

である。A_1, A_2 は $A_1 < A < A_2$ を満たす任意の実数で、$\lambda \to 0$ のとき(1.2)を満たすので、$\varphi(\lambda) \sim \Gamma(\alpha+1)A\lambda^{-\alpha} \quad (\lambda \to 0)$ となる。

３．次に、関数 x^α に緩やかな増加関数 $\log x$ が補正項として付けられた場合について次の事項が成り立つ。

$A > 0, \alpha > 0$ の定数のとき

$F(x) \sim Ax^\alpha \log x \quad (x \to \infty)$ ならば $\varphi(\lambda) \sim \Gamma(\alpha+1)A\lambda^{-\alpha} \log\dfrac{1}{\lambda} \quad (\lambda \to 0)$

（証明）$F(x) \sim Ax^\alpha \log x \ (x \to \infty)$ より $A_1 < A < A_2$ を満たす任意の正数 A_1, A_2 に対して、K を十分大きく取ると、$x \ge K \Rightarrow A_1 x^\alpha \log x < F(x) < A_2 x^\alpha \log x$ とできる。

ラプラス変換 $\varphi(\lambda)$ の $x < K$ での積分は

$$\int_0^K e^{-\lambda x} dF(x) \le \int_0^K dF(x) = F(K) - F(0) < \infty$$ （λ に無関係）。

$x \ge K$ での積分は部分積分により

$$\int_K^\infty e^{-\lambda x} dF(x) = \left[e^{-\lambda x}F(x)\right]_K^\infty + \lambda\int_K^\infty e^{-\lambda x}F(x)dx = -e^{-\lambda x}F(K) + \lambda\int_K^\infty e^{-\lambda x}F(x)dx \quad (1.3)$$

(1.1)　と同様にして、第２項の積分に関して、

$$\lambda\int_K^\infty e^{-\lambda x}x^\alpha \log x dx = \lambda\int_{\lambda K}^\infty e^{-t}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^\alpha \log\left(\frac{t}{\lambda}\right) \times \frac{1}{\lambda}dt = \lambda^{-\alpha}\int_{\lambda K}^\infty e^{-t}t^\alpha\left(\log t - \log\lambda\right)dt$$

$$= \lambda^{-\alpha}\int_{\lambda K}^\infty e^{-t}t^\alpha \log t\, dt - \lambda^{-\alpha}\log\lambda\int_{\lambda K}^\infty e^{-t}t^\alpha dt$$

$$\sim \lambda^{-\alpha}\int_0^\infty e^{-t}t^\alpha \log t\, dt - \lambda^{-\alpha}\log\lambda\int_0^\infty e^{-t}t^\alpha dt = C\lambda^{-\alpha} + \Gamma(\alpha+1)\lambda^{-\alpha}\log\frac{1}{\lambda} \quad (\lambda \to 0)$$

ただし、$C = \int_0^\infty e^{-t}t^\alpha \log t\, dt$。

よって、$\lambda \to 0$ のとき $\lambda\int_K^\infty e^{-\lambda x}x^\alpha \log x\, dx \sim \Gamma(\alpha+1)\lambda^{-\alpha}\log\dfrac{1}{\lambda}$　。以上より

$\varphi(\lambda) \sim \Gamma(\alpha+1)A\lambda^{-\alpha}\log\dfrac{1}{\lambda} \quad (\lambda \to 0)$ が成り立つ。

より一般に次の事項が成り立つ。

$A > 0, \alpha > 0, \ \beta \in R$ の定数のとき $F(x) \sim Ax^\alpha (\log x)^\beta \quad (x \to \infty)$ ならば

$\varphi(\lambda) \sim \Gamma(\alpha+1)A\lambda^{-\alpha}(\log\dfrac{1}{\lambda})^\beta \quad (\lambda \to 0)$。

これは次節において緩変動、正則変動関数というより一般化した概念の形で示される。

４．緩変動と正則変動関数

定義Ａ：$F(x)$ が $x \to \infty$ のとき正則変動 $\Leftrightarrow$ 任意の $t>0$ に対して

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F(t\,x)}{F(x)} = t^{\alpha}$$ となる定数αが存在する。

定義Ｂ：$L(x)$ が $x \to \infty$ のとき緩変動 $\Leftrightarrow$ 任意の $t>0$ に対して $\lim_{x\to\infty}\frac{L(t\,x)}{L(x)} = 1$。

＜例１＞β を任意の実数とするとき、$L(x) = A(\log x)^{\beta}$ は $x \to \infty$ のとき緩変動であり、$F(x) = Ax^{\alpha}$ 及び $F(x) = Ax^{\alpha}(\log x)^{\beta}$ は正則変動関数である。

（証明）

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L(t\,x)}{L(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\log xt)^{\beta}}{(\log x)^{\beta}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\log x + \log t)^{\beta}}{(\log x)^{\beta}} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F(tx)}{F(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{A(tx)^{\alpha}(\log tx)^{\beta}}{Ax^{\alpha}(\log x)^{\beta}} = \lim_{x\to\infty}\frac{t^{\alpha}(\log x + \log t)^{\beta}}{(\log x)^{\beta}} = t^{\alpha}$$

一般に $F(x)$ が正則変動、$\lim_{x\to\infty}\frac{F(t\,x)}{F(x)} = t^{\alpha}$ ならば $L(x) = x^{-\alpha}F(x)$ は緩変動である。なぜなら $\lim_{x\to\infty}\frac{L(t\,x)}{L(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{(tx)^{-\alpha}F(tx)}{x^{-\alpha}F(x)} = \lim_{x\to\infty} t^{-\alpha}\frac{F(tx)}{F(x)} = 1$。よって正則関数 $F(x)$ はある緩変動関数 $L(x)$ を用いて $F(x) = x^{\alpha}L(x)$ と表せる。緩変動関数 $L(x)$ は前節で述べた対数関数のベキ $(\log x)^{\beta}$ を一般化したものであり、３節の定理も次のように一般化できる。

定理１（アーベル型定理）

右連続、単調非減少関数 $F(x)$ に対して、$\alpha > 0$ と緩変動関数 $L(x)$ が存在して $x \to \infty$ のとき $F(x) \sim x^{\alpha}L(x)$ が成り立つならば $\lambda \to 0$ のとき、

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dF(x) \sim \Gamma(\alpha+1)\lambda^{-\alpha}L(\frac{1}{\lambda})$$ が成り立つ。

（証明）第３節の証明とほとんど同じ。

任意の $A_1 < 1 < A_2$ に対して、ある $K > 0$ が存在して $x > K$ ならば $A_1 x^{\alpha}L(x) < F(x) < A_2 x^{\alpha}L(x)$ が成り立つ。これより、(1.3)の第２項に対応する積分は

$$\lambda\int_K^{\infty} e^{-\lambda x}x^{\alpha}L(x)dx = \lambda\int_{\lambda K}^{\infty} e^{-t}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha}L\left(\frac{t}{\lambda}\right)\times\frac{1}{\lambda}dt = \lambda\int_{\lambda K}^{\infty} e^{-t}t^{\alpha}L\left(\frac{t}{\lambda}\right)dt$$

$$\sim \lambda^{-\alpha}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha}L\left(\frac{t}{\lambda}\right)dt$$

任意の $t > 0$ に対して $\lim_{\lambda\to 0}\frac{L(t/\lambda)}{L(1/\lambda)} = 1$ より証明すべき結果を得る。

$$\lambda\int_K^{\infty} e^{-\lambda x}x^{\alpha}L(x)dx \sim \lambda^{-\alpha}L(\frac{1}{\lambda})\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha}dt = \lambda^{-\alpha}L(\frac{1}{\lambda})\Gamma(\alpha+1)$$。

[2]タウバー型定理

簡単な例として、$F(x)$ が有界 $\lim_{x\to\infty} F(x) < \infty$, かつ $F(0)=0$ のとき、ラプラス変換

$\varphi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x)$ において、$\lim_{\lambda\to 0} \varphi(\lambda) = \int_0^\infty dF(x) = F(\infty) - F(0) = F(\infty)$ が成り立つ。

このように $\varphi(\lambda)$ の $\lambda \to 0$ の挙動から $F(x)$ の $x \to \infty$ の挙動を調べるのがタウバー型の定理であり、アーベル型定理の逆の主張である。

定理２（タウバー型定理）

$F(x)$ ： $x \ge 0$ で定義された右連続、単調非減少関数。かつラプラス変換

$\varphi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x),\ (\lambda > 0)$ が存在するものとする。以上の条件下で $\alpha > 0$ で

$x \to \infty$ のとき緩変動関数 $L(x)$ が存在して

$$\varphi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF(x) \sim \Gamma(\alpha+1)\lambda^{-\alpha} L\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (\lambda \to 0)$$ が成り立つならば

$$F(x) \sim x^{\alpha} L(x) \quad (x \to \infty)$$ が成り立つ。

補助定理３（分布関数の収束とラプラス変換の収束）

次の二つの事柄は同値である。ただし、$F_n\ (n \ge 1),\ G$ は $x \ge 0$ で定義された右連続、単調非減少関数とする。

（１） G の各連続点 x において、$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = G(x)$ かつ $\lim_{n\to\infty} F_n(\infty) = G(\infty)$

（２） $\varphi_n(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF_n(x),\ \varphi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dG(x)$ 　とおくと

各 $\lambda \ge 0$ に対して、$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\lambda) = \varphi(\lambda)$。

[定理２の証明]

$\varphi(\lambda)$ に関する仮定：$\varphi(\lambda) \sim \Gamma(\alpha+1)\lambda^{-\alpha} L(1/\lambda),\ (\lambda \to 0)$ 　より

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{(\lambda t)^{-\alpha} L\left(\frac{1}{\lambda t}\right)}{t^{-\alpha} L\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{L\left(\frac{1}{\lambda t}\right)}{L\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to\infty} \lambda^{-\alpha} \frac{L\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{L(x)} = \lambda^{-\alpha}$$ ，($\frac{1}{t} = x$ とした)。

前節１より $G(x) = \dfrac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},\ (x \ge 0)$ と置くと、$\lambda^{-\alpha} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dG(x)$。

他方$t>0$のとき、$F_t(x)=\dfrac{F\left(\dfrac{x}{t}\right)}{\varphi(t)}$と置くと

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}dF_t(x)=\int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{1}{\varphi(t)}dF\left(\frac{x}{t}\right)=\frac{1}{\varphi(t)}\int_0^\infty e^{-\lambda ty}dF(y)=\frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)}$$

よって$\lim_{t\to 0}\dfrac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)}=\lim_{t\to 0}\int_0^\infty e^{-\lambda x}dF_t(x)=\int_0^\infty e^{-\lambda x}dG(x)$。　$G(x)$は連続なので、補助定理３より全ての$x>0$に対して、$\lim_{t\to 0}F_t(x)=G(x)$。すなわち、$\lim_{t\to 0}\dfrac{1}{\varphi(t)}F\left(\dfrac{x}{t}\right)=G(x)$。

これより、$F\left(\dfrac{x}{t}\right)\sim\varphi(t)G(x)\sim\Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha}L\left(\dfrac{1}{t}\right)\dfrac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}=\left(\dfrac{x}{t}\right)^\alpha L\left(\dfrac{1}{t}\right)\quad(t\to 0)$。

$x=1$と置き、改めて$\dfrac{1}{t}=x$とすると　$F(x)\sim x^\alpha L(x)\quad(x\to\infty)$。　　（証明終わり）

定理４．　定理１、２をまとめると、$\alpha>0, L(x)$は$x\to\infty$のとき緩変動関数とするとき、次の二つの事柄は一方から他方が導かれる。

（１）$F(x)\sim x^\alpha L(x)\quad(x\to\infty)$

（２）　$\varphi(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda x}dF(x)\sim\Gamma(\alpha+1)\lambda^{-\alpha}L\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)\quad(\lambda\to 0)$

◎ 分布$F(x)$が密度$f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}$を持ち、$\varphi(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda x}dF(x)=\int_0^\infty e^{-\lambda x}f(x)dx$の場合

$\varphi(\lambda)$の挙動と$f(x)$の挙動の関係について次の定理が成り立つ。

定理５．

非負値関数$f(x)$は$x\geq 0$で単調であると仮定し、$\varphi(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda x}f(x)dx$とする。

$\alpha>0, L(x)$は$x\to\infty$のとき緩変動関数とするとき、次の２つは互いに同値である。

（１）$\varphi(\lambda)\sim\Gamma(\alpha+1)\lambda^{-\alpha}L\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)\quad(\lambda\to 0)$、　（２）$f(x)\sim\alpha x^{\alpha-1}L(x)\quad(x\to\infty)$

（証明）（２）＝＝＞（１）の証明

$x\to\infty$のとき、$F(x)\sim\int_0^x\alpha y^{\alpha-1}L(y)dy=x^\alpha\int_0^1\alpha t^{\alpha-1}L(xt)dt$　　ただし$y=xt$、

$$\sim x^\alpha\int_0^1\alpha t^{\alpha-1}L(x)dt=x^\alpha L(x)$$

よって定理２より（１）が成り立つ。

（１）＝＝＞（２）の証明

定理２より $F(x) \sim x^{\alpha} L(x)\ \ (x \to \infty)$。$0 < a < b$ のとき

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^b \frac{t\, f(t\,x)}{F(t)}dx = \lim_{t\to\infty}\frac{F(bt)-F(at)}{F(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{(bt)^{\alpha}L(bt)-(at)^{\alpha}L(at)}{t^{\alpha}L(t)} = b^{\alpha}-a^{\alpha}$$

$g_t(x) = \dfrac{t\, f(tx)}{F(t)}$ と置くと、$f(x)$ は単調なので $g_t(x)$ は x の単調関数であり、$t \to \infty$ のとき

$F(t) \sim t^{\alpha} L(t)$ なので、$\lim_{t\to\infty}\int_a^b g_t(x)dx = b^{\alpha}-a^{\alpha} = \int_a^b \alpha x^{\alpha-1}dx$ より被積分関数

$g_t(x) = \dfrac{t\, f(tx)}{F(t)}$ は $t \to \infty$ のとき有界である。よって Helly の選出定理（付録２参照）より

t が $t_1, t_2, t_3 \cdots \to \infty$ と動くとき $\lim_{i\to\infty} g_{t_i}(x) = g(x)$ と収束する部分列 $\{g_{t_i}(x)\}$ が取れる。

任意の区間 $[a,b]$ で $\int_a^b g(x)dx = b^{\alpha}-a^{\alpha} = \int_a^b \alpha x^{\alpha-1}dx$ となるので、$g(x) = \alpha x^{\alpha-1}$。

$g_t(x) = \dfrac{t\, f(tx)}{F(t)}$ において $F(t) \sim t^{\alpha} L(t)\ \ (t \to \infty)$、$f(t\,x)$ は x が $a \le x \le b$ の任意の実数なので、極限 $g(x)$ は系列 $\{t_1, t_2, t_3 \cdots\}$ と無関係となり、任意の $t \to \infty$ に対して成り立つ。

$x = 1$ と置くと、$f(t) \sim \dfrac{\alpha F(t)}{t} = \alpha t^{\alpha-1} L(t)\ \ (t \to \infty)$ より（２）が成り立つ。

以上は $x \to \infty,\ \lambda \to 0$ のときの挙動に関する議論であったが、$x \to 0,\ \lambda \to \infty$ のときの挙動についても、全く同様に示される。

定理６.

$F(x), \varphi(\lambda)$ は定理２と同じ条件を満たす関数とする。このとき、つぎの２つは同値である。ただし $\alpha > 0,\ L(x)$ は $x \to 0$ のとき緩変動関数とする。

（１）$F(x) \sim x^{\alpha} L(x) \quad (x \to 0)$

（２）$\varphi(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dF(x) \sim \Gamma(\alpha+1)\lambda^{-\alpha} L\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)\ \ (\lambda \to \infty)$

[3]ベキ級数への応用

$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k$, $a_k \ge 0\ (k \ge 0),\ |z| < 1$ とする。

$z = e^{-\lambda}$ とすると、$Q(e^{-\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k e^{-k\lambda} \quad (\lambda > 0)$。

$F(x) = \sum_{k \le x} q_k$ と置くと、$F(x)$ は右連続、単調非減少関数であり、$\varphi(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dF(x)$（スチェルチェス積分）が定義できる。そして

$\varphi(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda x}dF(x)=\sum_{k=0}^{\infty}q_k e^{-\lambda k}=Q(e^{-\lambda})$ となる。すなわち $\lim_{\lambda\to 0}\varphi(\lambda)=\lim_{z\to 1-0}Q(z)$ なのでタウバー型の定理４、５より次の定理を得る。

定理７．　次の二つは同値である。

（１）$S_n=q_0+q_1+\cdots+q_n \sim n^\alpha L(n) \quad (n\to\infty)$

（２）$Q(z)\sim\Gamma(\alpha+1)(1-z)^{-\alpha}L\left((1-z)^{-1}\right) \quad (z\to 1-0)$

さらに、もし数列 $\{q_k;k=0,1,2,\cdots\}$ が単調ならば次の（３）とも同値である。

（３）$q_n\sim \alpha n^{\alpha-1}L(n) \quad (n\to\infty)$

（証明）　定理４において $\lambda=\log\left(\frac{1}{z}\right)$ と置くと、$n\to\infty$ のとき $F(n)=\sum_{k=0}^{n}q_k\sim n^\alpha L(n)$。

$\lambda\to 0$ のとき $z\to 1-0$、$\lambda=-\log z=-\log(1-(1-z))=(1-z)+O((1-z)^2)$ なので

$\varphi(\lambda)\sim\Gamma(\alpha+1)\lambda^{-\alpha}L\left(\frac{1}{\lambda}\right)\sim\Gamma(\alpha+1)(1-z)^{-\alpha}L\left(\frac{1}{1-z}\right)$。

＜例＞　$Q(z)=(1-z)^{-\alpha}, \alpha>0$ のとき

一般二項定理より　$(1-z)^{-\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{-\alpha}{n}z^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}z^n$。

よって $q_0=1,\ q_n=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!} \quad (n\geq 1)$。$\frac{q_{n+1}}{q_n}=\frac{n+\alpha}{n+1}$ なので数列 $\{q_n\}$ は単調。

定理７の（２）より　$\Gamma(\alpha+1)L((1-z)^{-1})\sim 1 \ (z\to 1-0)$ なので（３）より

$q_n\sim\frac{\alpha n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}=\frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ を得る。

実際、$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(\alpha)q_n}{n^{\alpha-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n^{\alpha-1}n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{n^{\alpha-1}\Gamma(n+1)}=1$ が成り立つ。

ただし、証明には $0<s<1$ のとき $(n-1)^s\Gamma(n)\leq\Gamma(n+s)\leq n^s\Gamma(n)$ を利用する（高木貞治著；解析概論ｐ２５２参照）。

付録

１．スティルチェス積分

$g(x),F(x)$ を区間 $[a,b]$ で定義された実数値、有界関数とする。$[a,b]$ の分割

$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ に対して $F(x)$ に関するリーマン和

$\sum_{i=0}^{n-1}g(\xi_i)\left(F(x_{i+1})-F(x_i)\right),\ \xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$ を作る。$\max(x_{i+1}-x_i)\to 0$ となるように、分割

を細かくしたとき分割の如何にかかわらず、この和が一定値に収束すれば、この値を $g(x)$ の $F(x)$ に関する Riemann-Stieltjes 積分といい $\int_a^b g(x)dF(x)$ で表す。任意の連続関数 $g(x)$ に対してこの積分が存在するための必要十分条件は $F(x)$ が有界変動なことである。
従って、Riemann-Stieltjes 積分では $g(x)$ を連続、 $F(x)$ を有界変動と仮定する。

$F(x)$ が有界変動 $\Leftrightarrow$ $[a,b]$ 上で定義された関数 $F(x)$ に対して区間 $[a,b]$ の全ての有限分割 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ に対して

$$\underset{[a,b]}{Var}\, F = Sup\left\{\sum_{k=1}^{n} \left|F(x_k) - F(x_{k-1})\right| \,;\, a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\right\}$$

を関数 $F(x)$ の区間 $[a,b]$ 上での全変分という。

$\underset{[a,b]}{Var}\, F < +\infty$ のとき $F(x)$ は区間 $[a,b]$ で有界変動という。

２．Helly の選出定理

閉区間 $[a,b]$ において単調増加な関数列 $\{f_n(x)\}$ が $\underset{n;a\le x\le b}{Sup} \left|f_n(x)\right|$ を満足するならば、適当な部分列 $\{f_{n_k}(x); n_1 < n_2 < \cdots\}$ を選び全ての x $(a \le x \le b)$ に対して $\lim_{n_k \to \infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ が存在するようにできる。極限関数 $f(x)$ は明らかに増加関数であるが、右連続性 $f(x+0) = f(x)$ を満足する。

（証明）

区間 $[a,b]$ に属する有理数は可算なので、 $r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べることができる。
条件 $\sup_{n;a\le x\le b} \left|f_n(x)\right|$ より $f_1(r_1), f_2(r_1), f_3(r_1), \cdots$ は有界な数列なので収束部分列

$f_{a_1}(r_1), f_{a_2}(r_1), f_{a_3}(r_1), \cdots$ (ただし $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$) を選ぶことができる。 $x = r_2$ として

$f_{a_1}(r_2), f_{a_2}(r_2), f_{a_3}(r_2), \cdots$ はまた有界な数列なのでこの中から収束部分列

$f_{b_1}(r_2), f_{b_2}(r_2), f_{b_3}(r_2), \cdots$ (ただし $\{b_1, b_2, \cdots\} \subseteq \{a_1, a_2, \cdots\}$, $b_1 < b_2 < b_3 < \cdots$) を選ぶことができる。以下同様にして、順に各 r_k で収束する部分列を選ぶ。ここで関数列 $\{f_n(x)\}$ の部分列 $\{f_{a_1}(x), f_{b_2}(x), f_{c_3}(x), f_{d_4}(x)\cdots\}$ を選ぶと、全ての有理数 $r_1, r_2, r_3, \cdots$ で収束する（対角線論法）。この部分列を改めて $\{f_{n_k}(x); n_1 < n_2 < \cdots\}$ と書くと、

$$-\infty < \lim_{n_k\to\infty} f_{n_k}(r_i) = y_i < \infty \quad (i = 1,2,3,\cdots) \tag{1}$$

単調増加性より、$r_k < r_m$ ならば $y_k \le y_m$。従って

$$f(x) = \inf_{r_j > x} y_j \quad (a \le x < b), \quad f(1) = \lim_{n_k\to\infty} f_{n_k}(1) \tag{2}$$

によって定義された $f(x)$ は単調増加である。$a \le x < b$ のとき右連続 $f(x+0) = f(x)$ となることは、$\inf_{r_j > x} y_j = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \inf_{r_k > x+\varepsilon} y_k$ から分かる。この等式は $r_k < r_m$ ならば $y_k \le y_m$ より明らかに $\inf_{r_j > x} y_j \le \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \inf_{r_k > x+\varepsilon} y_k$ なので、逆の不等号を示す。$\inf_{r_j > x} y_j = y$ とすると、$\lim_{m\to\infty} y_{j_m} = y$ となる $j_1 < j_2 < \cdots$ が取れる。ε を十分小さく取れば $r_{j_i} > r_k > x + \varepsilon$ となる r_k が取れる。故に $\inf_{r_j > x} y_j \ge \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \inf_{r_k > x+\varepsilon} y_k$ が成り立つ。

また有理数の稠密性から任意の $x(a < x < b)$ と任意の $\varepsilon > 0$（ただし$a < x - 2\varepsilon$とする）に対して、$x > r_j > x - \varepsilon > r_k > x - 2\varepsilon$ となる r_k, r_j が存在する。よって、

$f(x) \ge y_j \ge f(x-\varepsilon) \ge y_k \ge f(x - 2\varepsilon)$ を得て $f(x-0) = \sup_{r_j < x} y_j$ となる。

次に $a < x < b,\ x < r_j$ とすると、$f_n(x) \le f_n(r_j)$ より $\limsup_{n_i\to\infty} f_{n_i}(x) \le \lim_{n_i\to\infty} f_{n_i}(r_j) = y_j$。

従って、$\limsup_{n_i\to\infty} f_{n_i}(x) \le \inf_{r_j > x} y_j = f(x) = f(x+0)$。同じく $a < x < b,\ x > r_j$ とすると、

$\liminf_{n_i\to\infty} f_{n_i}(x) \ge \lim_{n_i\to\infty} f_{n_i}(r_j) = y_j$、故に $\sup_{r_j < x} y_j = f(x-0) \le \liminf_{n_i\to\infty} f_{n_i}(x)$。

よって、区間 $[a,b]$ 上の $f(x)$ の連続点、すなわち $f(x-0) = f(x+0)$ を満たす x においては、$\lim_{n_i\to\infty} f_{n_i}(x)$ が存在して $f(x)$ に等しい。$f(x)$ は単調増加であり単調増加な関数の不連続点は高々可算である。よって $\lim_{n_i\to\infty} f_{n_i}(x)$ が存在しないような x が存在しても高々可算個しかない。それを $x_1, x_2, x_3 \cdots$ とし、再び対角線論法を使えば、$\{f_{n_i}(x)\}$ の部分列 $\{f_{n_i^*}(x)\}$ で $\lim_{n_i^*\to\infty} f_{n_i^*}(\lambda_k),\ (k = 1,2,3,\cdots)$ が存在するものを選ぶことができる。

参考図書

「漸近挙動入門」　　高橋陽一郎著　　　日本評論者　　（２００２年）
「An Introduction to Probability Theory and Its Application　Volume Ⅱ」　W.Feller
John Wiley & Sons, Inc.　(1971)
「ヒルベルト空間論」　　吉田耕作著　　共立出版　　２００２年復刊